دائرة الفيزياء **مقياس فيزياء 1**

العمليات على الأشعة

1- الجداء السلمي:

ليكن الشعاعان : $\vec{U} = \begin{pmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{pmatrix}$ و $\vec{V} = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}$

نعرف الجداء السلمي بين الشعاعين بالمقدار :

$$\vec{U}.\vec{V} = \|\vec{U}\|\cdot\|\vec{V}\|\cdot \cos(\vec{U},\vec{V})$$

- يكون موجباً في حالة $(\vec{U},\vec{V}) < \frac{\pi}{2}$ - يكون سالباً في حالة $(\vec{U},\vec{V}) > \frac{\pi}{2}$

- يكون معدوماً في حالة $(\vec{U},\vec{V}) = \frac{\pi}{2}$ (الشعاعان متعامدان)

- العبارة التحليلية للجداء السلمي :

$$\vec{U}.\vec{V} = U_X \cdot V_X + U_Y \cdot V_Y + U_Z \cdot V_Z$$

- طويلة الشعاع : $\|\vec{U}\| = \sqrt{U_X U_X + U_Y U_Y + U_Z U_Z} = \sqrt{U_x^2 + U_y^2 + U_z^2}$

- الزاوية بين شعاعين : $COS(\vec{U}, \vec{V}) = \dfrac{\vec{U}.\vec{V}}{\|\vec{U}\|\cdot\|\vec{V}\|}$

2- الجداء الشعاعي:

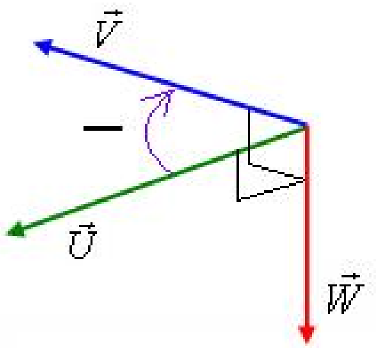
ليكن الشعاعان : $\vec{U} = \begin{pmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{pmatrix}$ و $\vec{V} = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}$

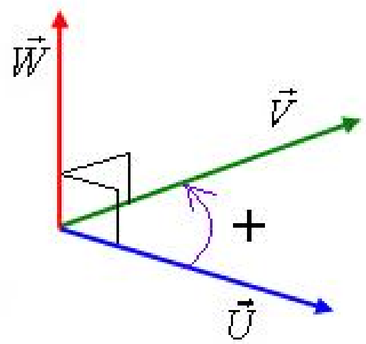
نعرف الجداء الشعاعي بين الشعاعين بالشعاع : $\vec{W} = \vec{U} \wedge \vec{V}$ بحيث تكون :

- الطويلة : $\|\vec{W}\| = \|\vec{U}\|\cdot\|\vec{V}\|\cdot|\operatorname{Sin}(\vec{U},\vec{V})|$

- حامل الشعاع $\vec{W}$ يكون عمودياً على حاملي الشعاعين $\vec{U}$ و $\vec{V}$

- إتجاه الشعاع $\vec{W}$ يكون حسب قاعدة الدوران الموجب من $\vec{U}$ إلى $\vec{V}$





- يكون أعظمياً في حالة الشعاعين متعامدين
- يكون معدوماً في حالة الحاملين متوازيين
- نلاحظ أن: $\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{0}$, $\vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{0}$, $\vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}$

و كذلك: $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k} \;,\; \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i} \;,\; \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$

- العبارة التحليلية للجداء ألشعاعي :

$$\vec{U} \wedge \vec{V} = \left| \begin{array}{ccc|cc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & \vec{i} & \vec{j} \\ U_x & U_y & U_z & U_x & U_y \\ V_x & V_y & V_z & V_x & V_z \end{array} \right.$$

$$W_x = U_y \cdot V_z - U_z \cdot V_y$$
$$W_y = U_z \cdot V_x - U_x \cdot V_z$$
$$W_z = U_x \cdot V_y - U_y \cdot V_x$$

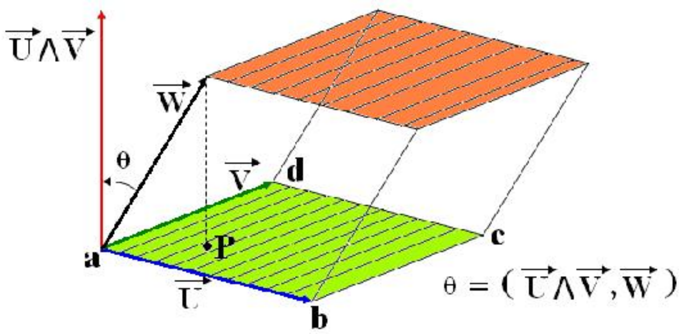
3- الجداء المختلط :

لتكن الأشعة: $\vec{U} = \begin{pmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{pmatrix}$ ، $\vec{V} = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}$ و $\vec{W} = \begin{pmatrix} W_x \\ W_y \\ W_z \end{pmatrix}$

نعرف الجداء المختلط بين الأشعة $\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}$ بالمقدار السلمي : $\vec{W} \cdot (\vec{U} \wedge \vec{V})$

- يكون معدوماً في واحد من الحالات التالية :
  * واحد من الأشعة معدوم
  * اثنان من الأشعة متوازيان
  * الأشعة الثلاثة تنتمي إلى نفس المستوي

- الجداء المختلط دوري :
  * $\vec{U} \cdot (\vec{V} \wedge \vec{W}) = \vec{W} \cdot (\vec{U} \wedge \vec{V})$
  * $\vec{U} \cdot (\vec{V} \wedge \vec{W}) = \vec{V} \cdot (\vec{W} \wedge \vec{U})$



- الجداء المختلط يساوي هندسيا حجم متوازي السطوح المشكل من الأشعة الثلاثة

4- الجداء ألشعاعي المضاعف:

لتكن الأشعة : $\vec{U} = \begin{pmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{pmatrix}$ ، $\vec{V} = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}$ و $\vec{W} = \begin{pmatrix} W_x \\ W_y \\ W_z \end{pmatrix}$

نعرف الجداء ألشعاعي المضاعف بين الأشعة $\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}$ بالشعاع : $\vec{W} \wedge (\vec{U} \wedge \vec{V})$

- ليس تجميعياً : $\vec{W} \wedge (\vec{U} \wedge \vec{V}) \neq (\vec{W} \wedge \vec{U}) \wedge \vec{V}$ و

- $(\vec{W} \wedge \vec{U}) \wedge \vec{V} = (\vec{V} \cdot \vec{U}) \vec{W} - (\vec{V} \cdot \vec{W}) \vec{U}$
- $\vec{W} \wedge (\vec{U} \wedge \vec{V}) = (\vec{W} \cdot \vec{V}) \vec{U} - (\vec{W} \cdot \vec{U}) \vec{V}$

- يكون الجداء $\vec{W} \wedge (\vec{U} \wedge \vec{V})$ معدوما إذا كان $\vec{U} \,//\, \vec{V}$ أو $\vec{W}$ عمودي على $\vec{U}, \vec{V}$
- يكون الجداء $(\vec{W} \wedge \vec{U}) \wedge \vec{V}$ معدوما إذا كان $\vec{U} \,//\, \vec{W}$ أو $\vec{V}$ عمودي على $\vec{U}, \vec{W}$

5- الدالة الشعاعية :

هي شعاع متغير في طويلته و حامله و اتجاهه تكون مركباته عبارة عن دوال عددية للمتغير t :

$$\vec{V}(t) = \begin{pmatrix} V_x(t) \\ V_y(t) \\ V_z(t) \end{pmatrix}$$

ـ مشتقة الدالة الشعاعية:

يمكن أن نعرف مشتقة هذه الدالة الشعاعية بالشكل التالي :

$$\vec{W}(t) = \frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} W_x = \dfrac{dV_x}{dt} \\ W_y = \dfrac{dV_y}{dt} \\ W_z = \dfrac{dV_z}{dt} \end{pmatrix}$$

نستطيع أن نذكر بعض خواص الاشتقاق الشهيرة :

* جمع دالتين شعاعيتين :

$$\frac{d[\vec{V}_1(t) + \vec{V}_2(t)]}{dt} = \frac{d\vec{V}_1(t)}{dt} + \frac{d\vec{V}_2(t)}{dt}$$

* جداء دالة سلمية بدالة شعاعية :

$$\frac{d[g(t) \times \vec{V}(t)]}{dt} = \frac{dg(t)}{dt} \times \vec{V}(t) + g(t) \times \frac{d\vec{V}(t)}{dt}$$

* **الجداء السلمي لدالتين شعاعيتين :**

$$\frac{d[\vec{V}_1(t) \cdot \vec{V}_2(t)]}{dt} = \frac{d\vec{V}_1(t)}{dt} \cdot \vec{V}_2(t) + \vec{V}_1(t) \cdot \frac{d\vec{V}_2(t)}{dt}$$

* الجداء ألشعاعي لدالتين شعاعيتين :

$$\frac{d[\vec{V}_1(t) \wedge \vec{V}_2(t)]}{dt} = \frac{d\vec{V}_1(t)}{dt} \wedge \vec{V}_2(t) + \vec{V}_1(t) \wedge \frac{d\vec{V}_2(t)}{dt}$$

ـ في الحالة العامة يمكن الحصول على مشتقة أي دالة شعاعية معقدة باستعمال الخواص المذكورة هذه

ـ تكامل الدالة الشعاعية:

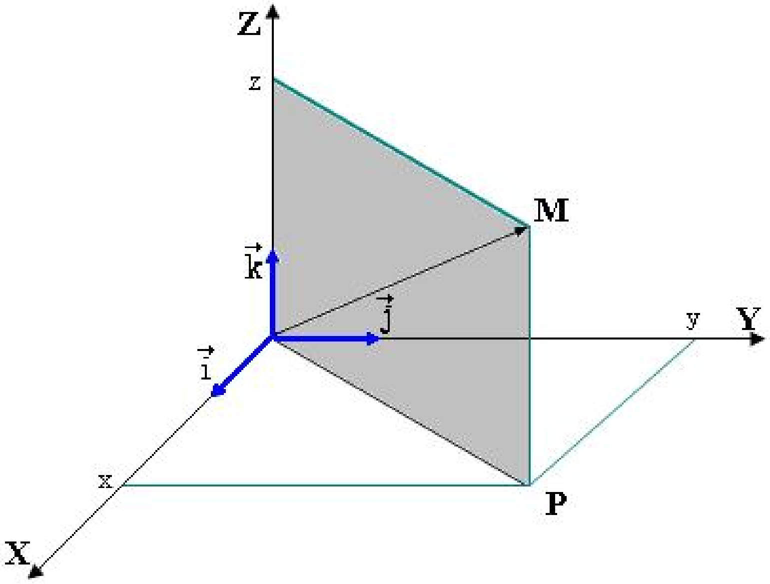
بنفس الشكل نعرف تكامل الدالة الشعاعية بالشكل **التالي** :

$$\vec{g}(t) = \int \vec{V}(t)dt = \begin{pmatrix} g_x(t) = \int V_x(t)dt \\ g_y(t) = \int V_y(t)dt \\ g_z(t) = \int V_z(t)dt \end{pmatrix}$$

يمكن كذلك استعمال نتائج الاشتقاق للحصول على تكامل دالة شعاعية معينة ، يكفي فقط أن نغير ترتيب العملية ، مثلا نعرف أن التسارع هو مشتقة السرعة و بالتالي نقول أن السرعة هي تكامل التسارع

جملة الإحداثيات

الإحداثيات الديكارتية:

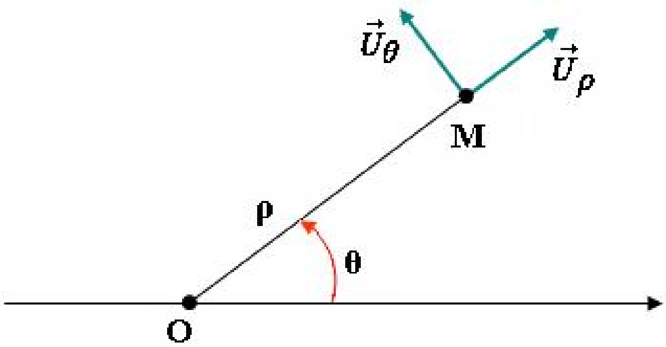


$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, M(x,y,z)

$\vec{i} = \overrightarrow{Ct}$, $\vec{j} = \overrightarrow{Ct}$, $\vec{k} = \overrightarrow{Ct}$

$||\vec{i}|| = 1$, $||\vec{j}|| = 1$, $||\vec{k}|| = 1$

الإحداثيات القطبية:



$$\overrightarrow{OM} = \rho \, . \, \vec{U}_\rho$$

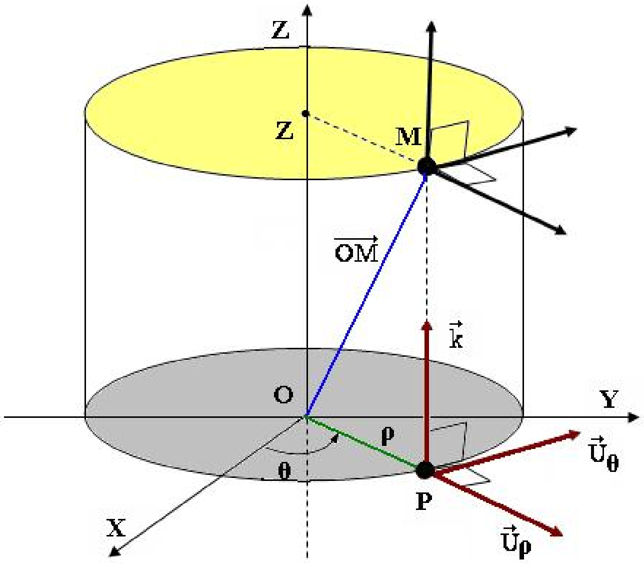
$$M(\rho, \theta) \; , \; \rho \geq 0 \; , \; 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$\vec{U}_\rho = \text{Cos}\theta \; \vec{i} + \text{Sin}\theta \; \vec{j}$$

$$\vec{U}_\theta = -\text{Sin}\theta \; \vec{i} + \text{Cos}\theta \; \vec{j}$$

$$\frac{d\vec{U}_\rho}{d\theta} = \vec{U}_\theta \quad , \quad \frac{d\vec{U}_\theta}{d\theta} = -\vec{U}_\rho$$

الإحداثيات الأسطوانية :



$$\overrightarrow{OM} = \rho\, \overrightarrow{U_\rho} + Z\, \vec{k}$$

$M(\rho , \theta , Z)$, $\rho \geq 0$,

$0 \leq \theta \leq 2\pi$,

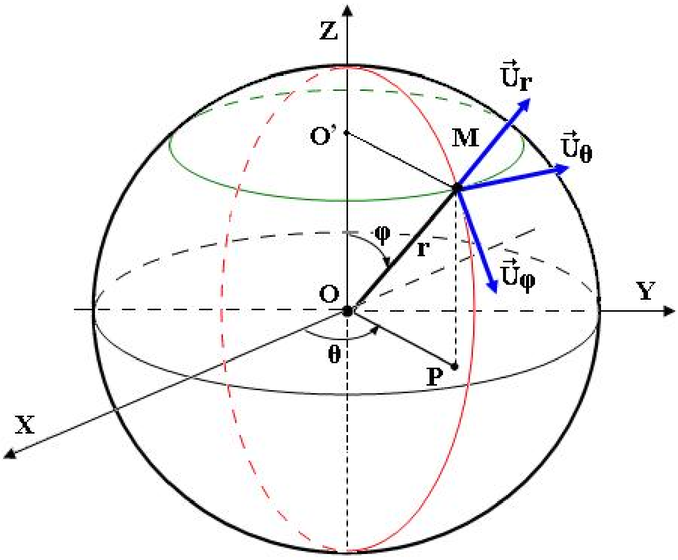
$-\infty < Z < +\infty$

$$\vec{U}_\rho = \text{Cos}\theta\, \vec{i} + \text{Sin}\theta\, \vec{j}$$

$$\vec{U}_\theta = -\text{Sin}\theta\, \vec{i} + \text{Cos}\theta\, \vec{j}$$

$$\vec{k} = \vec{k}$$

الإحداثيات الكروية :



$M(r, \theta , \varphi)$, $r \geq 0$,

$0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \varphi \leq \pi$

$\overline{OM} = r\, \vec{U}_r$, $\overline{OP} = \overline{O'M} = r.\text{Sin}\varphi$

$$\vec{U}_r = \text{Cos}\theta.\text{Sin}\varphi\, \vec{i} + \text{Sin}\theta.\text{Sin}\varphi\, \vec{j} + \text{Cos}\varphi\, \vec{k}$$

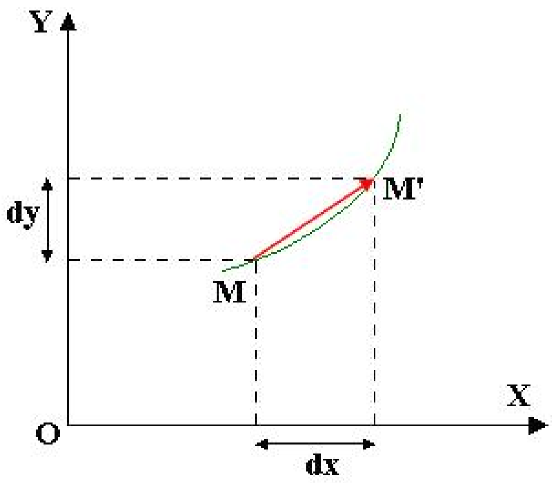
$$\vec{U}_\varphi = \text{Cos}\theta.\text{Cos}\varphi\, \vec{i} + \text{Sin}\theta.\text{Cos}\varphi\, \vec{j} - \text{Sin}\varphi\, \vec{k}$$

$$\vec{U}_\theta = -\text{Sin}\theta\, \vec{i} + \text{Cos}\theta\, \vec{i}$$

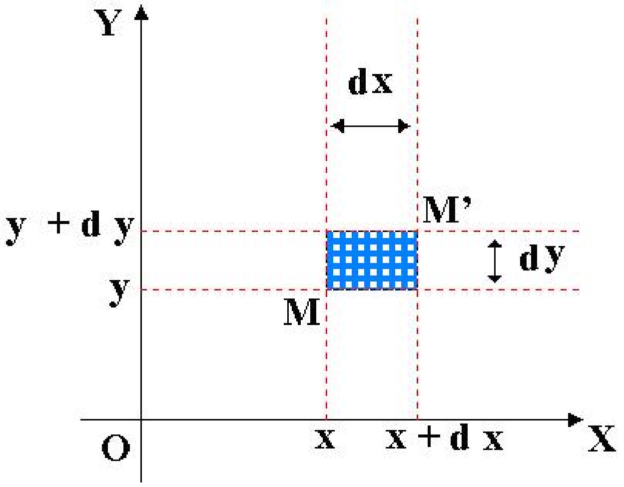
عنصر الطول و المساحة و الحجم

1-في الإحداثيات الديكارتية :

أ- عنصر الطول:



ب - عنصر المساحة:

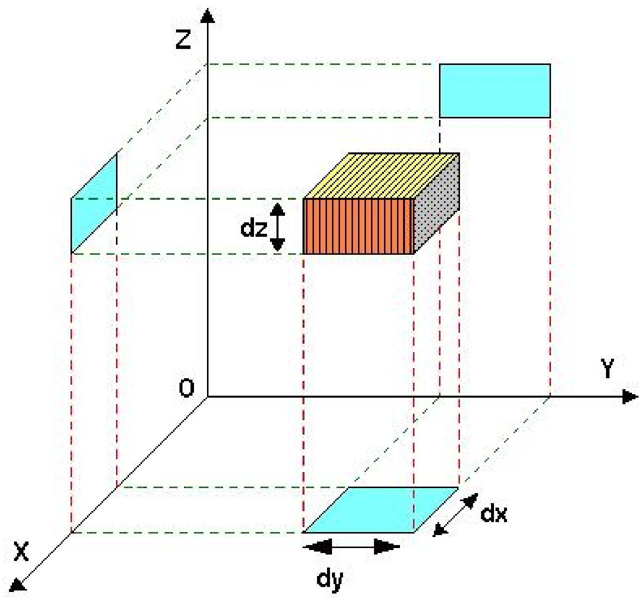


$$d\vec{l} = d\,\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MM'} = dx\vec{i} + dy\vec{j}$$

$$dl = ||d\,\overrightarrow{OM}|| = ||\overrightarrow{MM'}|| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

$$ds = dx.dy \quad , \quad S = \iint dx.dy$$

ج- عنصر الحجم:

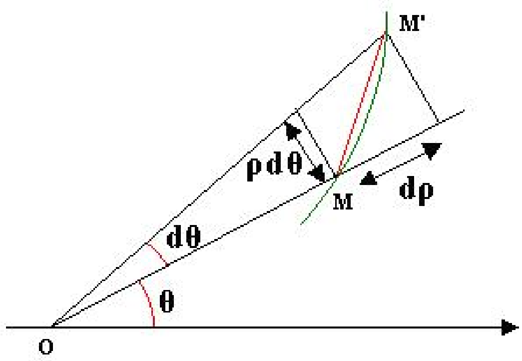


$$dV = dx.dy.dz \quad ,$$

$$V = \iiint dx.dy.dz$$

2- في الإحداثيات القطبية :

ا- عنصر الطول:

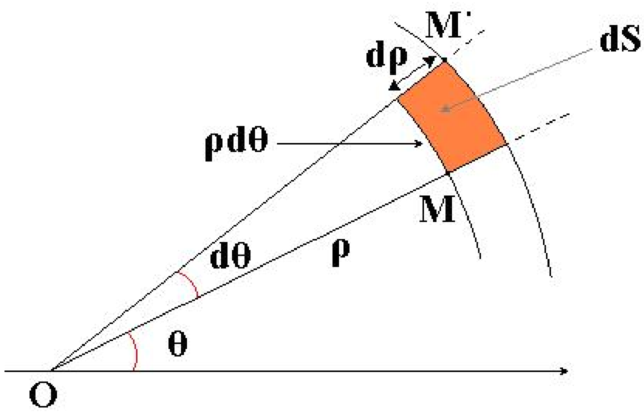


$$d\vec{l} = d\rho.\vec{U}_{\rho} + \rho d\theta.\vec{U}_{\theta}$$

$$dl = \|d\vec{l}\| = \sqrt{(d\rho)^2 + (\rho d\theta)^2}$$

$$L = \int \sqrt{(d\rho)^2 + (\rho d\theta)^2}$$

ب - عنصر المساحة:



$$ds = d\rho.\rho d\theta \quad ,$$

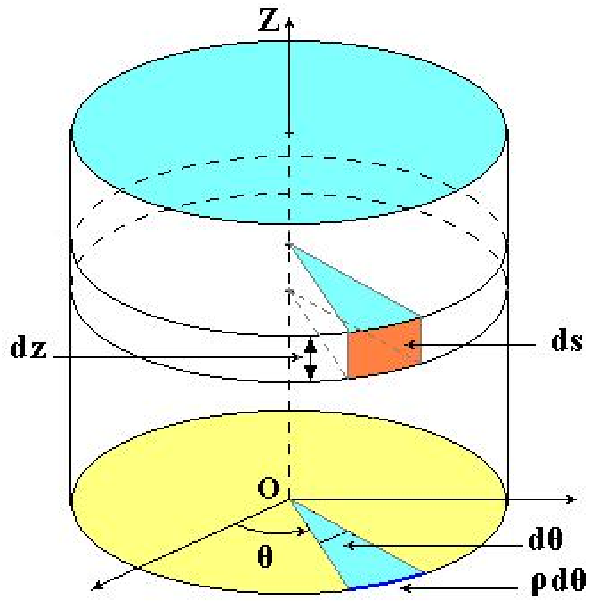
$$S = \iint \rho d\rho.d\theta$$

3- في الإحداثيات الأسطوانية:

أ-عنصر الطول:

$$dl = \|d\vec{l}\| = \sqrt{(d\rho)^2 + (\rho d\theta)^2 + (dz)^2} \quad ، \quad d\vec{l} = d\rho.\vec{U}_{\rho} + \rho d\theta.\vec{U}_{\theta} + dz.\vec{k}$$

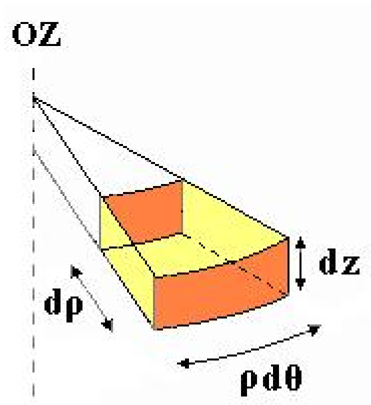
ب- عنصر المساحة الجانبية :



$$dS = dz.(\rho.d\theta)$$

$$S = \iint dz.\rho d\theta$$

ج- عنصر الحجم :



$$dV = d\rho.\rho d\theta.dz$$

$$V = \iiint d\rho.\ \rho d\theta.dz$$

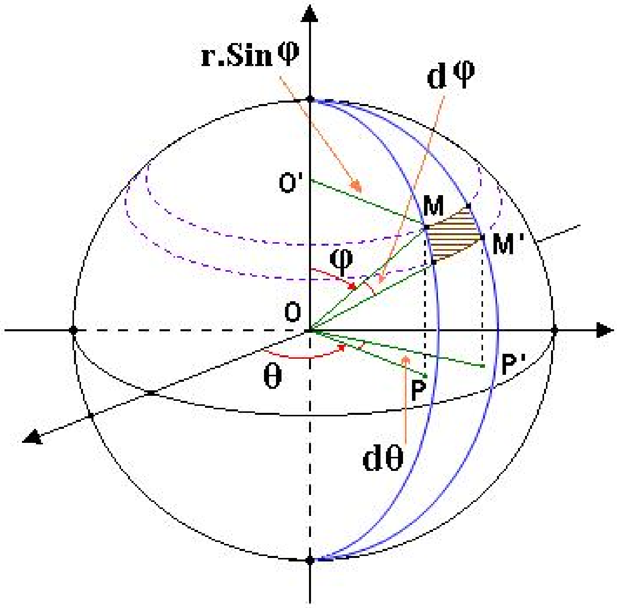
4-في الإحداثيات الكروية:

أ-عنصر الطول :

$$d\vec{l} = (dr)\vec{U}_r + (rd\varphi)\vec{U}_\varphi + (rSin\varphi\, d\theta)\vec{U}_\theta$$

$$dl = ||d\vec{l}|| = \sqrt{(dr)^2 + (rd\varphi)^2 + (rSin\varphi d\theta)^2}$$

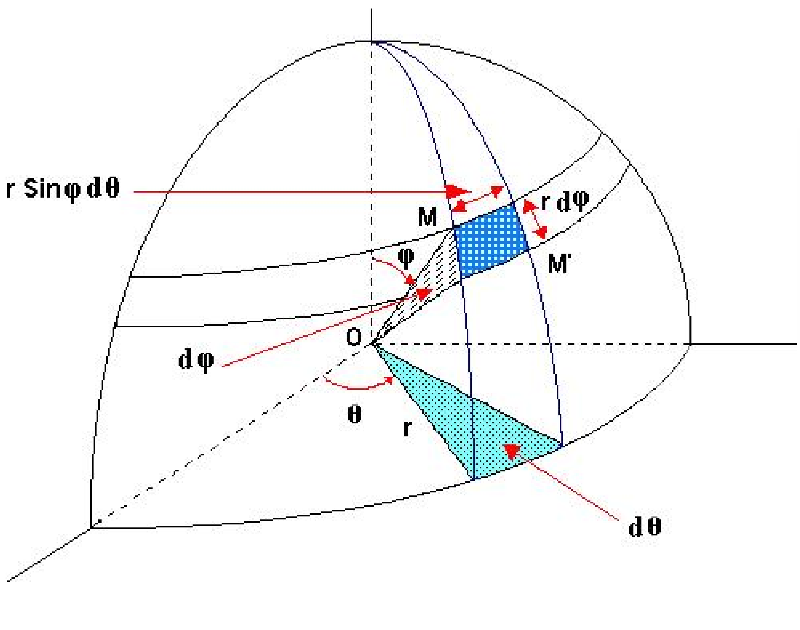
ب -عنصر المساحة :



$$dS = (RSin\varphi.d\theta).Rd\varphi$$

$$S = \iint R^2 Sin\theta.d\theta.d\varphi$$

ب- عنصر الحجم :



$$dV = dr.(rSin\varphi\, d\theta).(rd\varphi)$$

$$V = \iiint r^2 Sin\varphi.dr.d\varphi.d\theta$$

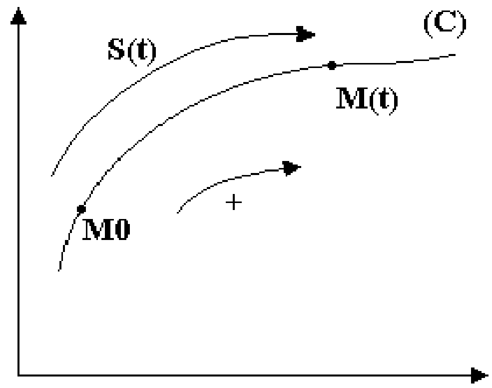
حركة النقطة المادية

1- تعاريف :

- **النقطة المادية:** هي جسم مادي متناهي في الصغر (**بدون أبعاد**)، لا يملك حركة دوران حول نفسه
- **المسار (المسلك):** هو مجموع النقاط الهندسية التي يمكن أن تتواجد فيها النقطة المادية أثناء حركتها بالنسبة لمعلم معين، و يعرف عادة بإعطاء المعادلات الوسيطية بدلالة الزمن :

$$x = x(t) \quad , \quad y = y(t) \quad , \quad z = z(t)$$

بحذف الزمن بين هذه المعادلات نحصل على معادلة المسار: $f(x,\ y,\ z) = 0$

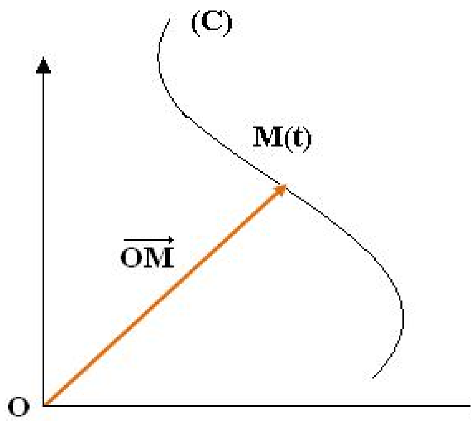


- **الفاصلة المنحنية و المعادلة الزمنية:**
عندما يكون المسار معروفاً ، نحدد عليه نقطة مرجعية M_0 **واتجاه موجب للحركة، نحدد موقع النقطة** $M(t)$ بالفاصلة المنحنية:

$$S = \widehat{M_0M} = S(t)$$

الدالة $S(t)$ تسمى المعادلة الزمنية للحركة

2-شعاع السرعة وشعاع التسارع :



-**شعاع الموقع :** يحدد المسافة الشعاعية للنقطة $M(t)$ بالنسبة لمركز الإحداثيات و يكون دالة للزمن: $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}(t)$

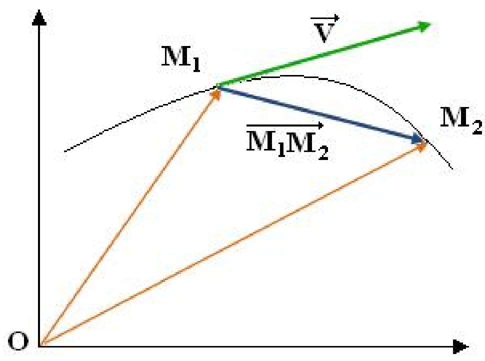
- **شعاع السرعة المتوسطة و السرعة اللحظية:**

- **السرعة المتوسطة:**

$$\overrightarrow{V_M} = \frac{\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}}{t_2 - t_1} = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{\Delta t}$$

- السرعة اللحظية:

$$\vec{V} = \lim_{M_2 \to M_1} \vec{V}_M = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \overrightarrow{OM}}{\Delta t} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

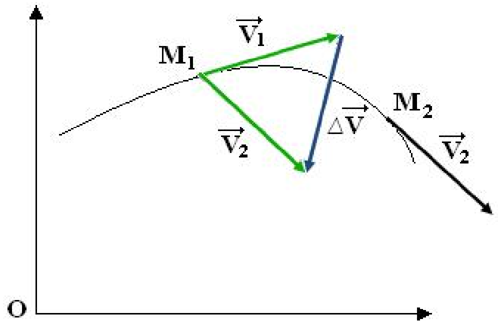


و تكون محمولة بالمماس للمسار عند النقطة M
و اتجاهها هو اتجاه الحركة

-شعاع التسارع المتوسط و التسارع اللحظي:

- **التسارع المتوسط:**

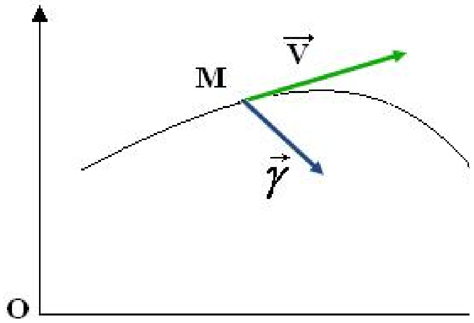
$$\vec{\gamma}_M = \frac{\vec{V}_2 - \vec{V}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t}$$



- **التسارع اللحظي:**

$$\vec{\gamma} = \lim_{M_2 \to M_1} \vec{\gamma}_M = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt}$$

ويكون اتجاهه دائما نحو تقعر المسار، يصنع زاوية كيفية مع شعاع السرعة



3- السرعة و التسارع في مختلف جمل الإحداثيات:

أ- الإحداثيات الديكارتية:

شعاع الموقع: يكتب من الشكل :

$$\overrightarrow{OM} = x(t).\vec{i} + y(t).\vec{j} + z(t).\vec{k}$$

شعاع السرعة: يكون

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}.\vec{i} + \frac{dy(t)}{dt}.\vec{j} + \frac{dz(t)}{dt}.\vec{k}$$

طويلة السرعة: تكتب

$$\|\vec{V}\| = \sqrt{\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz(t)}{dt}\right)^2}$$

شعاع التسارع: يكون

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}.\vec{i} + \frac{d^2y(t)}{dt^2}.\vec{j} + \frac{d^2z(t)}{dt^2}.\vec{k}$$

طويلة التسارع: تكتب

$$\|\vec{\gamma}\| = \sqrt{\left(\frac{d^2x(t)}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z(t)}{dt^2}\right)^2}$$

ب- <u>الإحداثيات القطبية:</u>

<u>شعاع الموقع:</u> يكتب من الشكل $\overrightarrow{OM} = \rho(t).\vec{U}_\rho$ مع ملاحظة أن $\vec{U}_\rho$ متغير مع ***t***

<u>شعاع السرعة:</u> يكون $\vec{V} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dfrac{d\rho}{dt}.\vec{U}_\rho + \rho(t).\dfrac{d\vec{U}_\rho}{dt}$

$$\boxed{\vec{V} = \dot{\rho}.\vec{U}_\rho + \rho(t).\dot{\theta}.\vec{U}_\theta}$$

<u>طويلته:</u> تكتب

$$\|\vec{V}\| = \sqrt{\left(\dot{\rho}\right)^2 + \left(\rho(t).\dot{\theta}\right)^2}$$

<u>شعاع التسارع:</u> يكون

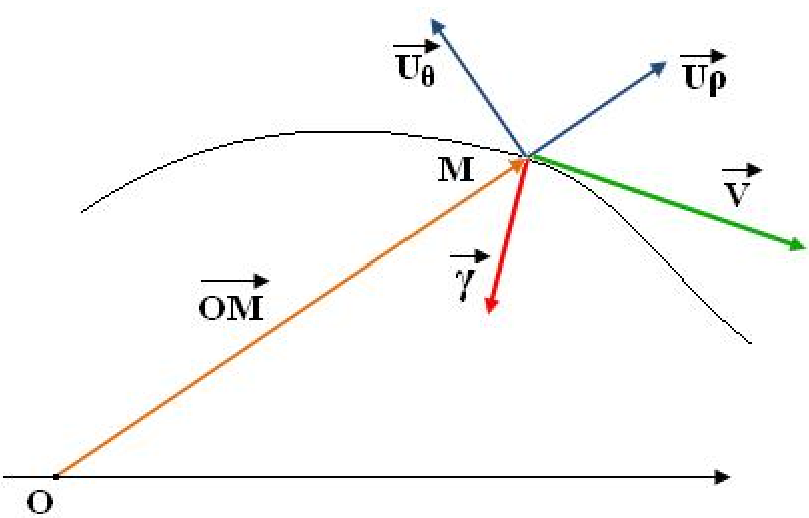
$$\vec{\gamma} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d\vec{V}}{dt}$$

$$= \ddot{\rho}.\vec{U}_\rho + \dot{\rho}.\dot{\theta}.\vec{U}_\theta + \dot{\rho}.\dot{\theta}.\vec{U}_\theta + \rho.\ddot{\theta}.\vec{U}_\theta - \rho.\dot{\theta}^2.\vec{U}_\rho$$

$$\boxed{\vec{\gamma} = \left[\ddot{\rho} - \rho.\dot{\theta}^2\right]\vec{U}_\rho + \left[2\dot{\rho}.\dot{\theta} + \rho.\ddot{\theta}\right]\vec{U}_\theta}$$

<u>الطويلة:</u> تكتب من الشكل

$$\|\vec{\gamma}\| = \sqrt{\left[\ddot{\rho} - \rho.\dot{\theta}^2\right]^2 + \left[2\dot{\rho}.\dot{\theta} + \rho.\ddot{\theta}\right]^2}$$



ج- الإحداثيات الأسطوانية:

شعاع الموقع: يكتب من الشكل $\overrightarrow{OM} = \rho(t).\vec{U}_\rho + z(t).\vec{k}$ ، $\vec{U}_\rho$ يتغير مع t

شعاع السرعة: يكون

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\rho}{dt}.\vec{U}_\rho + \rho(t).\frac{d\vec{U}_\rho}{dt} + \frac{dz}{dt}.\vec{k}$$

$$\vec{V} = \dot{\rho}.\vec{U}_\rho + \rho(t).\dot{\theta}.\vec{U}_\theta + \frac{dz}{dt}.\vec{k}$$

طويلته: تكتب

$$\|\vec{V}\| = \sqrt{\left(\dot{\rho}\right)^2 + \left(\rho(t).\dot{\theta}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

شعاع التسارع:

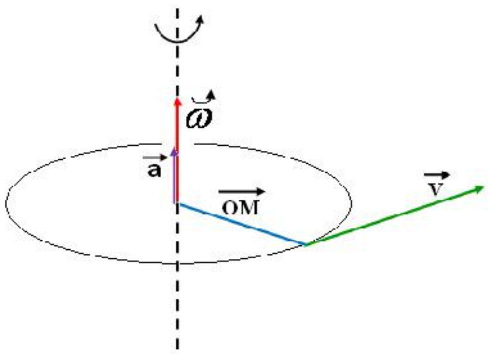
$$\vec{\gamma} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d\vec{V}}{dt}$$

$$\vec{\gamma} = \left[\ddot{\rho} - \rho.\dot{\theta}^2\right]\vec{U}_\rho + \left[2\dot{\rho}.\dot{\theta} + \rho.\ddot{\theta}\right]\vec{U}_\theta + \frac{d^2z}{dt^2}.\vec{k}$$

طويلة التسارع:

$$\|\vec{\gamma}\| = \sqrt{\left(\ddot{\rho} - \rho.\dot{\theta}^2\right)^2 + \left(2\dot{\rho}.\dot{\theta} + \rho.\ddot{\theta}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}$$

ه- شعاع السرعة الزاوية و شعاع التسارع الزاوي:



في الإحداثيات القطبية، عبارة السرعة في الحركة الدائرية

تكتب من الشكل: $\vec{V} = R.\dot{\theta}.\vec{U}_\theta$

إذا أخذنا أشعة الواحدة الأسطوانية: $\left(\vec{U}_\rho, \vec{U}_\theta, \vec{k}\right)$

نكتب $\vec{U}_\theta = \vec{k} \wedge \vec{U}_\rho$ و تصبح للسرعة:

$$\vec{V} = R.\dot{\theta}.\left(\vec{U}_\rho \wedge \vec{U}_{..}\right) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$$

نسمي المقدار $\vec{\omega}$ شعاع السرعة الزاوية للحركة و يكون محمولا بمحور الدوران كما في الشكل.

نسمي كذلك: $\vec{a} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \dot{\vec{\omega}}$ بشعاع التسارع الزاوي و يكون أيضا محمولا بنفس المحور

إذا كانا موجبين يكون اتجاههما نحو الأعلى، و يكون اتجاههما **نحو الأسفل إذا** كانا سالبين.

و يكتب شعاع التسارع :

$$\text{¥} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d\breve{\mu}}{dt}\wedge\overrightarrow{OM} + \breve{\mu}\wedge\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

$$= \breve{a}\wedge\overrightarrow{OM} + \breve{\mu}\wedge\vec{V}$$

$$= \breve{a}\wedge\overrightarrow{OM} + \breve{\mu}\wedge\left(\breve{\mu}\wedge\overrightarrow{OM}\right)$$

$$= \breve{a}\wedge\overrightarrow{OM} - \mu^{2}.\overrightarrow{OM}$$

ه- <u>الإحداثيات الكروية:</u>

<u>شعاع الموقع:</u> يكتب من الشكل $\overrightarrow{OM} = r(t).\vec{U}_r$ ، $\vec{U}_r$ يتغير **مع** t

<u>شعاع السرعة:</u> يكون

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dr}{dt}.\vec{U}_r + r(t).\frac{d\vec{U}_r}{dt}$$

$$\vec{V} = \dot{r}.\vec{U}_r + r(t).\frac{d\vec{U}_r}{dt}$$

$$\frac{d\vec{U}_r}{dt} = \frac{\partial\vec{U}_r}{\partial\text{¨}}\frac{\partial\text{¨}}{\partial t} + \frac{\partial\vec{U}_r}{\partial\text{¯}}\frac{\partial\text{¯}}{\partial t}$$

حيث:

$$\frac{\partial\vec{U}_r}{\partial\text{¯}} = -Sin\text{¯}\,Sin\text{¨}\,\vec{i} + Cos\text{¯}\,Sin\text{¨}\,\vec{j} = Sin\text{¨}\,\vec{U}_{\text{¯}}$$

و :

$$\frac{\partial\vec{U}_r}{\partial\text{¨}} = Cos\text{¯}\,Cos\text{¨}\,\vec{i} + Sin\text{¯}\,Cos\text{¨}\,\vec{j} - Sin\text{¨}\,\vec{k} = \vec{U}_{\text{¨}}$$

بحيث **نجد:**

$$\frac{d\vec{U}_r}{dt} = \dot{\text{¨}}\,\vec{U}_{\text{¨}} + \dot{\text{¯}}\,Sin\text{¨}\,\vec{U}_{\text{¯}}$$

و للسرعة :

$$\boxed{\vec{V} = (\dot{r})\vec{U}_r + (r\dot{\text{¨}})\vec{U}_{\text{¨}} + (rSin\text{¨}\,\dot{\text{¯}})\vec{U}_{\text{¯}}}$$

و طويلتها هي :

$$\boxed{\|\vec{V}\| = \sqrt{\left(\dot{r}\right)^2 + \left(r.\dot{\text{¨}}\right)^2 + \left(r.\dot{\text{¯}}.Sin\text{¨}\right)^2}}$$

بنفس الأسلوب يمكن أن نحسب عبارة شعاع التسارع، لكن يجب حساب مشتقات $\vec{U}_\theta$ و $\vec{U}_\varphi$:

$$\frac{d\vec{U}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\,\vec{U}_r + \dot{\varphi}\,Cos\theta\,\vec{U}_\varphi$$

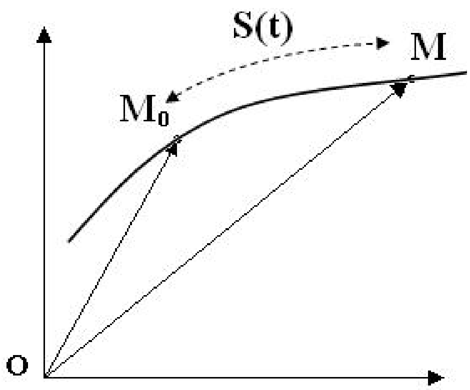
$$\frac{d\vec{U}_\varphi}{dt} = -\dot{\varphi}\left[Sin\theta\,\vec{U}_r + Cos\theta\,\vec{U}_\theta\right]$$

و نجد :

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{\gamma} = &\left[\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2 Sin\theta^2\right]\vec{U}_r + \left[2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\,Sin\theta\,Cos\theta\right]\vec{U}_\theta \\ &+ \left[2\dot{r}\dot{\varphi}\,Sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\,Cos\theta + r\ddot{\varphi}\,Sin\theta\right]\vec{U}_\varphi\end{aligned}}$$

و بنفس الأسلوب نحصل على طويلة شعاع التسارع :

$$\|\vec{\gamma}\| = \sqrt{\left[\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2 Sin\theta^2\right]^2 + \left[2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\,Sin\theta\,Cos\theta\right]^2 + \left[2\dot{r}\dot{\varphi}\,Sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\,Cos\theta + r\ddot{\varphi}\,Sin\theta\right]^2}$$



و- الإحداثيات المنحنية (الذاتية):

- الفاصلة المنحنية:

تكتب من الشكل $S = S(t) = M_0M(t)$

-شعاع السرعة : يكتب $\vec{V} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt} = \dfrac{dS}{dt}\vec{U}_T$

حيث : $\vec{U}_T = \dfrac{\vec{V}}{\|\vec{V}\|}$ يسمى شعاع الواحدة المماسي

-شعاع التسارع:

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2}\vec{U}_T + \frac{dS}{dt}\frac{d\vec{U}_T}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2}\vec{U}_T + \frac{dS}{dt}\left(\frac{d\vec{U}_T}{dS}\frac{dS}{dt}\right)$$

$$= \frac{d^2S}{dt^2}\vec{U}_T + \left(\frac{dS}{dt}\right)^2\frac{d\vec{U}_T}{dS} = \frac{d^2S}{dt^2}\vec{U}_T + \left(\frac{dS}{dt}\right)^2\frac{d\vec{U}_T}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dS}$$

نكتب
$$\vec{¥} = \frac{d^2S}{dt^2}\vec{U}_T + \frac{1}{°}\left(\frac{dS}{dt}\right)^2\vec{U}_N$$

مع $\vec{U}_N = \frac{d\vec{U}_T}{d¯}$: شعاع الواحدة ألنظامي، عمودي دائما على $\vec{U}_T$ في اتجاه دوران المسار

و $° = \frac{dS}{d¯}$: يمثل نصف قطر انحناء المسار عند النقطة M .

و نكتب شعاع التسارع :
$$\vec{¥} = \vec{¥}_T + \vec{¥}_N$$

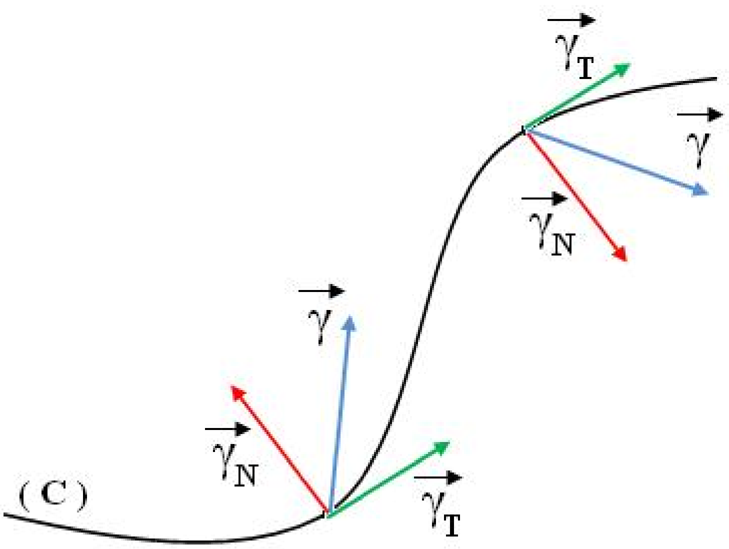
مع التسارع المماسي:
$$\vec{¥}_T = \frac{d^2S}{dt^2}\vec{U}_T = \frac{d\,\|\vec{V}\|}{dt}\vec{U}_T$$

و التسارع ألنظامي:
$$\vec{¥}_N = \frac{1}{°}\left(\frac{dS}{dt}\right)^2\vec{U}_N = \frac{\|\vec{V}\|^2}{°}\vec{U}_N$$

و نكتب كذلك : $\|\vec{¥}\|^2 = \|\vec{¥}_T\|^2 + \|\vec{¥}_N\|^2$ أو $\|\vec{¥}_N\| = \sqrt{\|\vec{¥}\|^2 - \|\vec{¥}_T\|^2}$

و نحصل على نصف قطر الانحناء:
$$° = \frac{\|\vec{V}\|^2}{\|\vec{¥}_N\|} = \frac{\|\vec{V}\|^2}{\sqrt{\|\vec{¥}\|^2 - \|\vec{¥}_T\|^2}}$$

و نحصل على الانتقال العنصري: $ds = \|\vec{V}\|\,dt$ وطول المسار: $S = \int_{s_0}^{s_1} ds = \int_{t_1}^{t_2} \|\vec{V}\|\,dt$



الحركة النسبية

1-أ- تعريف:

الهدف من هده الدراسة هو استخراج العلاقات التي تربط بين السرعة من جهة و التسارع من جهة ثانية عندما ندرس حركة جسم ما داخل معلمين مختلفين.

ب- المعلم المطلق و المعلم النسبي:

نفترض أن أحد المعلمين **ثابت** نسميه **المعلم المطلق** و نرمز له بـ $R(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ، **و نفترض المعلم الثاني متحرك** بالنسبة للأول و نسميه **المعلم النسبي** و نرمز له بـ $R'(o',\vec{i'},\vec{j'},\vec{k'})$

كل المقادير التي **نلاحظها داخل المعلم المطلق** نسميها **مقادير مطلقة**، و كل المقادير التي نلاحظها في **العلم النسبي** نسميها **مقادير نسبية**.

ج- السرعة المطلقة و السرعة النسبية:

للسرعة المطلقة تكتب داخل المعلم المطلق $R(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$:

$$\boxed{\vec{V}_a = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}}$$

السرعة النسبية تكتب داخل المعلم النسبي $R'(o',\vec{i'},\vec{j'},\vec{k'})$:

$$\boxed{\vec{V}_r = \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} = \frac{dx'}{dt}\vec{i'} + \frac{dy'}{dt}\vec{j'} + \frac{dz'}{dt}\vec{k'}}$$

د- التسارع المطلق و التسارع النسبي:

التسارع المطلق يكتب داخل المعلم المطلق $R(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$:

$$\boxed{\text{¥}_a = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}}$$

التسارع النسبي يكتب داخل المعلم النسبي $R'(o',\vec{i'},\vec{j'},\vec{k'})$.

$$\boxed{\text{¥}_r = \frac{d^2\overrightarrow{O'M}}{dt^2} = \frac{d^2x'}{dt^2}\vec{i'} + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{j'} + \frac{d^2z'}{dt^2}\vec{k'}}$$

يجب أن ننتبه إلى أن أشعة **الواحدة** $(\vec{i'},\vec{j'},\vec{k'})$ **تكون ثابتة داخل المعلم النسبي** غير أنها متغيرة داخل المعلم المطلق و بالتالي يجب أخذها بالاعتبار عند الاشتقاق داخل **هذا المعلم**.

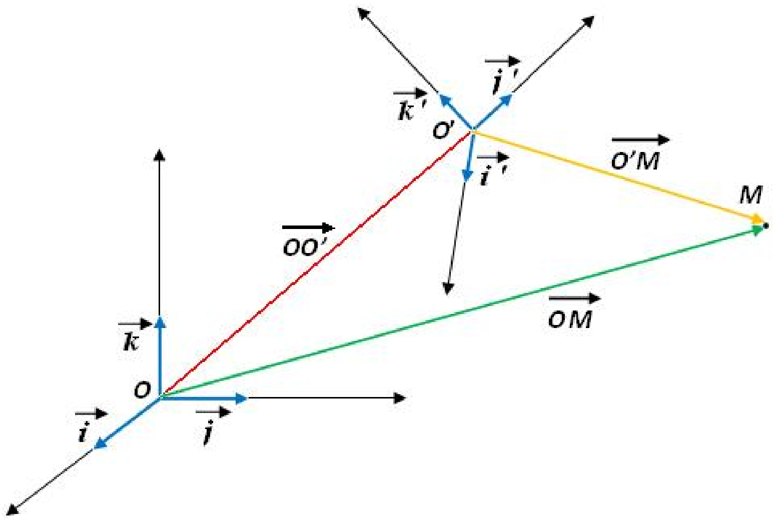
2- تركيب السرعة و التسارع:

شعاع الموقع المطلق يكتب : $\overrightarrow{OM}$

شعاع الموقع النسبي يكتب : $\overrightarrow{O'M}$

بينهما العلاقة:

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}}$$



أ- تركيب السرعة:

يجب الملاحظة أن أشعة الواحدة $(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ متغيرة في المعلم المطلق و مشتقاتها غير معدومة في هذا المعلم. لنحسب للسرعة المطلقة:

$$\vec{V}_a = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}$$

$$\vec{V}_a = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \frac{d}{dt}\left(x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}'\right)$$

$$\vec{V}_a = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \left(\frac{dx'}{dt}\vec{i}' + \frac{dy'}{dt}\vec{j}' + \frac{dz'}{dt}\vec{k}'\right) + \left(x'\frac{d\vec{i}'}{dt} + y'\frac{d\vec{j}'}{dt} + z'\frac{d\vec{k}'}{dt}\right)$$

نكتبها باختصار:

$$\boxed{\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r}$$

حيث:

$$\boxed{\vec{V}_e = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \left(x'\frac{d\vec{i}'}{dt} + y'\frac{d\vec{j}'}{dt} + z'\frac{d\vec{k}'}{dt}\right)}$$

تسمى للسرعة المكتسبة

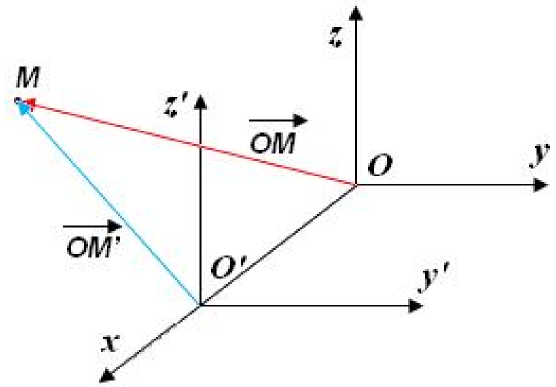
وهي تتعلق من جهة بالشعاع $\overrightarrow{OO'}$، و بإحداثيات النقطة المتحركة و بدوران المعلم النسبي داخل المعلم المطلق من جهة ثانية. أي حركة كيفية للمعلم النسبي، يمكن تحليلها إلى مجموع حركتين ؛ إنسحابية و دورانية.

أ-1- حركة المعلم النسبي إنسحابية:

في هذه الحالة تكون الأشعة $(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ ثابتة في المعلم المطلق و مشتقاتها معدومة، لنجد:

$$\boxed{\vec{V}_e = \vec{V}_T = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}}$$

نسميها سرعة الانسحاب



حالة خاصة:
إذا كانت سرعة الانسحاب ثابتة، يمكن أن نختار المعلمين متوازيين لهما نفس المحور Ox و الانسحاب يتم وفق هذا المحور في هذه الحالة، نكتب العلاقة بين حركتي النقطة في المعلمين من الشكل:

$$\begin{cases} x(t) = x'(t) + V_T.t \\ y(t) = y'(t) \\ z(t) = z'(t) \end{cases}$$

مجموعة المعالم التي تتحرك في ما بينها حركة انسحابية منتظمة تعرف باسم المعالم العطالية أو المعالم الغليلية ، تملك أهمية خاصة في الميكانيك.

أ-2- <u>حركة المعلم النسبي</u> دورانية:

في هذه الحالة تكون O' ثابتة، نأخذها متطابقة مع O، في حين تدور أشعة الواحدة $(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ حول محور لحظي $[\Delta(t)]$ مرتبط بالمعلم المطلق و بالتالي نكتب:

$$\frac{d\vec{k}'}{dt} = \breve{\mu} \wedge \vec{k}' \quad , \quad \frac{d\vec{j}'}{dt} = \breve{\mu} \wedge \vec{j}' \quad , \quad \frac{d\vec{i}'}{dt} = \breve{\mu} \wedge \vec{i}'$$

و تصبح السرعة المكتسبة:

$$\vec{V}_e = \left(x'\frac{d\vec{i}'}{dt} + y'\frac{d\vec{j}'}{dt} + z'\frac{d\vec{k}'}{dt} \right) = \breve{\mu} \wedge (x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}')$$

$$\vec{V}_e = \vec{V}_{Rot} = \breve{\mu} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

حيث $\vec{V}_{Rot}$ تمثل السرعة المكتسبة نتيجة دوران المعلم النسبي، يجب الانتباه إلى أن $\breve{\mu}$ تمثل السرعة اللحظية الزاوية للدوران، متغيرة في الطويلة والاتجاه.

أ-3- <u>حركة المعلم النسبي</u> كيفية:
هي عبارة عن تركيب لحركتين، إنسحابية و دورانية، و تكون السرعة المكتسبة هي مجموع سرعتي الانسحاب و الدوران:

$$\vec{V}_e = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \breve{\mu} \wedge \overrightarrow{O'M} = \vec{V}_T + \vec{V}_{Rot}$$

ب- تركيب التسارع:

نحسب التسارع المطلق:

$$\vec{\gamma}_a = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \frac{d^2\overrightarrow{O'M}}{dt^2}$$

لنجد:

$$\vec{\gamma}_a = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \frac{d}{dt}\left\{\left(\frac{dx'}{dt}\vec{i}' + \frac{dy'}{dt}\vec{j}' + \frac{dz'}{dt}\vec{k}'\right) + \left(x'\frac{d\vec{i}'}{dt} + y'\frac{d\vec{j}'}{dt} + z'\frac{d\vec{k}'}{dt}\right)\right\}$$

$$\vec{\gamma}_a = \left(\frac{d^2x'}{dt^2}\vec{i}' + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{j}' + \frac{d^2z'}{dt^2}\vec{k}'\right)$$

$$+\left\{\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \left(x'\frac{d^2\vec{i}'}{dt^2} + y'\frac{d^2\vec{j}'}{dt^2} + z'\frac{d^2\vec{k}'}{dt^2}\right)\right\}$$

$$+\left\{2\left(\frac{dx'}{dt}\frac{d\vec{i}'}{dt} + \frac{dy'}{dt}\frac{d\vec{j}'}{dt} + \frac{dz'}{dt}\frac{d\vec{k}'}{dt}\right)\right\}$$

حيث يكتب في الأخير:

$$\boxed{\vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}_r + \vec{\gamma}_e + \vec{\gamma}_c}$$

مع:

التسارع المكتسب:

$$\boxed{\vec{\gamma}_e = \left\{\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \left(x'\frac{d^2\vec{i}'}{dt^2} + y'\frac{d^2\vec{j}'}{dt^2} + z'\frac{d^2\vec{k}'}{dt^2}\right)\right\}}$$

و التسارع التكميلي:

$$\boxed{\vec{\gamma}_c = \left\{2\left(\frac{dx'}{dt}\frac{d\vec{i}'}{dt} + \frac{dy'}{dt}\frac{d\vec{j}'}{dt} + \frac{dz'}{dt}\frac{d\vec{k}'}{dt}\right)\right\}}$$

هذا الأخير يسمى كذلك تسارع كوريوليس(***Coriolis***)، يصبح معدوما في حالتين:

- النقطة المادية ثابتة في المعلم النسبي
- المعلم النسبي يملك حركة انسحابية بالنسبة للمعلم المطلق

ب-1- حركة المعلم النسبي إنسحابية:

الأشعة $(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ ثابتة في المعلم المطلق و بالتالي يكون التسارع التكميلي معدوما و التسارع المكتسب يتبسط شكله إلى:

$$\boxed{\vec{\gamma}_e = \vec{\gamma}_T = \left\{\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}\right\}}$$

و يكتب التسارع المطلق من الشكل :

$$\boxed{\vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}_T + \vec{\gamma}_r}$$

حالة خاصة:

الحركة الإنسحابية منتظمة أي : $\vec{\gamma}_T = \vec{0}$ و هذا يؤدي إلى :

$$\boxed{\vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}_r}$$

التسارع هو نفسه في المعلمين، نقول أنه لامتغاير و نجد أن القوة هي نفسها كذلك و النتيجة المهمة أن قانون نيوتن الثاني يكتب بنفس الشكل في المعلمين و هذا يمثل مبدأ النسبية الغليلية، حيث تسمي هذه المعالم بالعطالية أو الغليلية.

ب-2- حركة المعلم النسبي دورانية:

O' ثابتة و متطابقة مع O، والأشعة $(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ **تدور حول محور لحظي** $[\Delta(t)]$**، بالتالي نكتب:**

$$\frac{d^2\overrightarrow{k'}}{dt^2} = \vec{\omega} \wedge \frac{d\overrightarrow{k'}}{dt} \quad , \quad \frac{d^2\overrightarrow{j'}}{dt^2} = \vec{\omega} \wedge \frac{d\overrightarrow{j'}}{dt} \quad , \quad \frac{d^2\overrightarrow{i'}}{dt^2} = \vec{\omega} \wedge \frac{d\overrightarrow{i'}}{dt}$$

$$\frac{d^2\overrightarrow{k'}}{dt^2} = \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{k'}\right) \quad , \quad \frac{d^2\overrightarrow{j'}}{dt^2} = \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{j'}\right) \quad , \quad \frac{d^2\overrightarrow{i'}}{dt^2} = \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{i'}\right)$$

و التسارع المكتسب:

$$\boxed{\vec{\gamma}_e = \vec{\gamma}_{Rot} = \dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}\right)}$$

و التسارع التكميلي:

$$\boxed{\vec{\gamma}_c = 2\vec{\omega} \wedge \vec{V}_r}$$

والتسارع المطلق:

$$\boxed{\vec{\gamma}_a = \dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}\right) + 2\vec{\omega} \wedge \vec{V}_r + \vec{\gamma}_r}$$

ب-3- حركة المعلم النسبي كيفية:

لدينا تركيب لحركتين، انسحابية و دورانية، و التسارع المطلق يكتب من الشكل العام:

$$\boxed{\vec{¥}_a = \vec{¥}_T + \dot{\breve{µ}} \wedge \overrightarrow{O'M} + \breve{µ} \wedge \left(\breve{µ} \wedge \overrightarrow{O'M} \right) + 2\breve{µ} \wedge \vec{V}_r + \vec{¥}_r}$$

3-تطبيقات:

3-أ- تأثير دوران الأرض على الأجسام عند سطحها:

الأرض تدور دورة واحدة كل 24 ساعة بسرعة زاوية تساوي : $\breve{µ} = 7.2722\text{x}10^{-5} rd/s$

- **التأثير على سرعة الأجسام:**

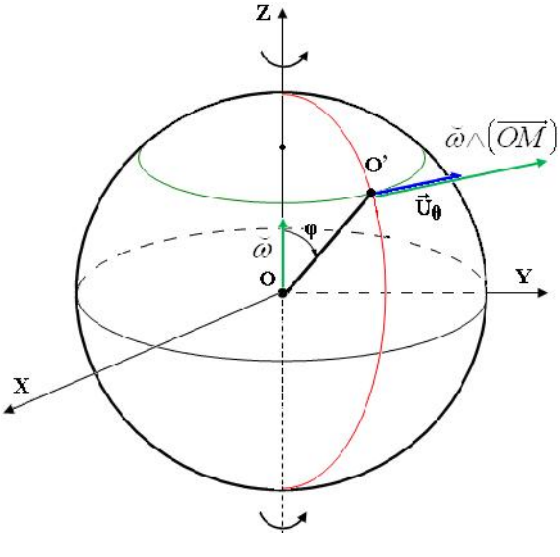
تكتب عبارة للسرعة المطلقة من الشكل : $\vec{V}_a = \dfrac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \breve{µ} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{V}_r$

حيث أن نصف قطر الأرض $\overrightarrow{OO'}$ يدور مع الأرض بنفس السرعة الزاوية و بالتالي نكتب:

$$\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} = \breve{µ} \wedge \overrightarrow{OO'}$$

و تصبح للسرعة المطلقة: $\boxed{\vec{V}_a = \breve{µ} \wedge \left(\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} \right) + \vec{V}_r = \breve{µ} \wedge \left(\overrightarrow{OM} \right) + \vec{V}_r}$

الجداء $\breve{µ} \wedge \left(\overrightarrow{OM} \right)$ يتعلق بموقع الجسم على خط العرض، حيث ينعدم عند القطبين و يصبح أعظميا عند خط الاستواء، و يكون اتجاهه نحو الشرق دائما (وفق شعاع الواحدة العرضي: $\vec{U}_{–}$).



من أجل زاوية φ محددة و إذا أخذنا :

$$\overrightarrow{OM} \simeq R_{Terre} = 6400Km$$

نجد أن:

$$\|\breve{µ} \wedge \overrightarrow{OM}\| = \|\breve{µ}\| . \|\overrightarrow{OM}\| . \sin ¨$$
$$= (465.42).\sin ¨ \;\; m/s$$

و هي تمثل السرعة التي يكتسبها الجسم نتيجة دوران الأرض

- **التأثير على تسارع الأجسام:**

عبارة التسارع المطلق تتبسط و تكتب من الشكل:

$$\boxed{\vec{¥}_a = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \breve{µ} \wedge \left(\breve{µ} \wedge \overrightarrow{O'M} \right) + 2\breve{µ} \wedge \vec{V}_r + \vec{¥}_r}$$

الحد الأول من التسارع يكتب:
$$\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}=\vec{\omega}\wedge\left(\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right)=\vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{OO'}\right)$$

لنجد في الأخير أن التسارع:
$$\boxed{\vec{\gamma}_a=\vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{OM}\right)+2\vec{\omega}\wedge\vec{V}_r+\vec{\gamma}_r}$$

- **<u>التأثير على تسارع الجاذبية:</u>**

إذا طبقنا النتيجة السابقة على تسارع الجاذبية $\vec{g}$ و افترضنا أن الجسم ساكن ($\vec{V}_r=\vec{0}$)، سوف نحصل على العلاقة:
$$\vec{g}_a=\vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{OM}\right)+\vec{g}_r$$

و لكون قياسات $\vec{g}$ تتم دائما في المعلم النسبي (سطح الأرض) ، نكتب العلاقة من الشكل:
$$\boxed{\vec{g}_r=\vec{g}_a-\vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{OM}\right)}$$

حيث: $\vec{g}_r=\vec{g}_{mes}$ هو التسارع المقاس، في حين $\vec{g}_a=\vec{g}_0$ يمثل التسارع الناتج عن تجاذب كتلتي الأرض و الجسم و هو مقدار ثابت لا يتأثر بدوران الأرض و اتجاهه نحو مركز الأرض دائما. و نحصل عليه من علاقة التجاذب العام بين الأجسام:

$$\boxed{\vec{F}_{grav}=-G\frac{m.M_{Terre}}{R^2_{Terre}}\vec{U}_r}$$
لنجد :
$$\boxed{\vec{g}_0=-G\frac{M_{Terre}}{R^2_{Terre}}\vec{U}_r}$$
و نجد عدديا :

$$\boxed{\begin{array}{c}R_{Terre}=6370\ Km\ \ ,\ M_{Terre}=5.9742\text{x}10^{24}\ Kg\ \ ,\ G=6.67\text{x}10^{-11}\ (U.I)\\ g_0=9.820346\ m/s\end{array}}$$

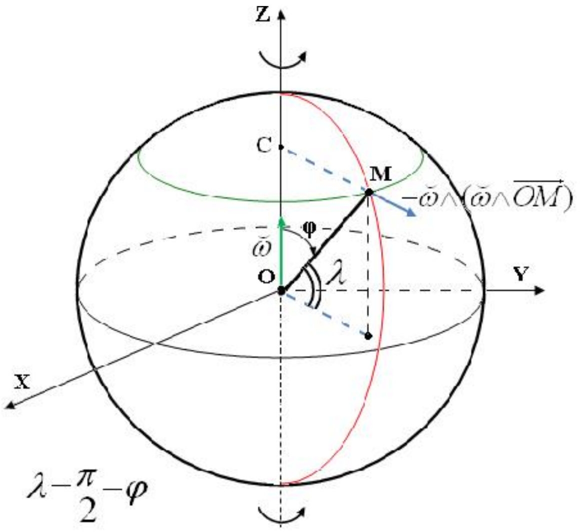
لذلك فإن التسارع المقاس $\boxed{\vec{g}_r=\vec{g}_{mes}}$ يتغير في قيمته و اتجاهه و ينحرف عن مركز الأرض

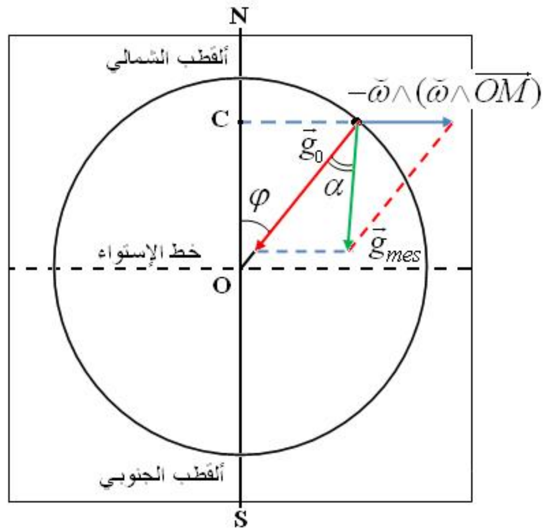
بسبب الحد المضاف $\boxed{-\vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{OM})}$

هذا الانحراف يتغير مع خط العرض، و ينعدم في الحالتين التاليتين:

- $\vec{\omega}\ //\ \overrightarrow{OM}$ و هو يحدث عند القطبين الشمالي و الجنوبي
- $\vec{\omega}\perp\overrightarrow{OM}$ و هو يحدث عند خط الاستواء، في هذه الحالة ينطبق الحدان و يصبحا محمولين بنصف قطر الأرض، لكن الفرق بين قيمتي التسارعين تكون أكبر ما يمكن، و تكون الجاذبية عند أصغر قيمة لها عند خط الاستواء.

من أجل نقطة تقع على خط العرض $a - \frac{®}{2} = ¨$ ، فإن اتجاه الحد المضاف يكون حسب الشعاع $\overrightarrow{CM}$ كما هو موضح في الشكل(على اليسار)، و بالتالي فاتجاه تسارع الجاذبية عند النقطة M ينحرف قليلا عن مركز الأرض بزاوية α، كما نلاحظه حسب مقطع خط الطول الذي تقع عليه النقطة M (الشكل على اليمين).





لنحسب طويلة التسارع المكتسب $-µ̆ \wedge (µ̆ \wedge \overrightarrow{OM})$ ، نجد:

$$\| -µ̆ \wedge (µ̆ \wedge \overrightarrow{OM}) \| = \| µ̆ \| . \| (µ̆ \wedge \overrightarrow{OM}) \|$$

$$= \| µ̆ \| .(\| µ̆ \| . \| \overrightarrow{OM} \|).Sin¨$$

$$= \| µ̆ \| .(\| µ̆ \| . \| \overrightarrow{OM} \|).Cosa$$

$$= R.µ^2.Cosa$$

إذا حللنا هذا التسارع إلى مركبتيه حسب الشعاعين $(\vec{U}_r, \vec{U}_{¨})$ ، نحصل على :

$$-µ̆ \wedge (µ̆ \wedge \overrightarrow{OM}) = \left[Rµ^2.Cos^2(a) \right].\vec{U}_r$$

$$+ \left[Rµ^2.Cos(a).Sin(a) \right].\vec{U}_{¨}$$

و نحصل في الأخير على مركبتي التسارع عند سطح الأرض $\vec{g}_r = \vec{g}_{mes}$ حسب نفس الشعاعين :

$$\vec{g}_{mes} = -\left\{ g_0 - \left[R\mu^2 . Cos^2(\text{ª}) \right] \right\} . \vec{U}_r$$
$$+ \left\{ R\mu^2 . Cos(\text{ª}) . Sin(\text{ª}) \right\} . \vec{U}_{\text{¨}}$$

و التي نكتبها بشكل مختصر: $\vec{g}_{mes} = g_{Rad} . \vec{U}_r + g_{Tang} . \vec{U}_{\text{¨}}$

و نحصل على زاوية الانحراف: $tg(\sim) = \dfrac{g_{Tang}}{g_{Rad}} = \dfrac{R\mu^2 Cos(\text{ª}) . Sin(\text{ª})}{g_0 - R\mu^2 Cos^2(\text{ª})}$

حسب المعطيات السابقة نجد : $R\mu^2 \simeq 0.0342\ m/s^2$ و بالتالي تسارع الجاذبية:

$$\vec{g}_{mes} = -\left[9.820346 - (0.0342) Cos^2(\text{ª}) \right] . \vec{U}_r$$
$$+ \left\{ (0.0342) . Cos(\text{ª}) . Sin(\text{ª}) \right\} . \vec{U}_{\text{¨}}$$

- <u>عند خط الاستواء</u>: $\text{¨} = \dfrac{\text{®}}{2}$, $\text{ª} = \dfrac{\text{®}}{2} - \text{¨} = 0$ وتسارع الجاذبية يملك أصغر قيمة:

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{g}_{mes} &= -\left[9.820346 - (0.0342) Cos^2(0) \right] . \vec{U}_r \\ &= -\left[9.786146 \right] . \vec{U}_r \end{aligned}}$$

- <u>عند القطبين</u>: $\text{¨} = 0$, $\text{ª} = \dfrac{\text{®}}{2}$ وتسارع الجاذبية يملك أكبر قيمة ممكنة، و يتبسط إلى :

$$\boxed{\vec{g}_{mes} = -\left[9.820346 \right] . \vec{U}_r}$$

- **<u>ملاحظة :</u>**

عندما نقيس تسارع الجاذبية في نصف الكرة الجنوبي فإن زاوية خط العرض $\text{ª} \leq 0$ و بالتالي فإن $Sin(\text{ª}) \leq 0$ ، يحافظ التسارع المكتسب على اتجاهه في حين يتغير اتجاه $\vec{g}_a = \vec{g}_0$ ، فنحصل على حالة منظرة لحالة الجزء الشمالي، يكون فيها الانحراف في الاتجاه المعاكس، غير أن القيم الناتجة تكون متكافئة.

تحريك النقطة المادية

I- مقدمة :

1- تعريف :
التحريك هو فرع أساسي من علم الميكانيك، يبحث عن إيجاد العلاقة بين حركة الأجسام المادية و التأثيرات (القوى)التي سببتها، و التي تكون ناتجة عن أجسام أخري قريبة منها.

2- معلم كوبرنيك و المعلم العطالي :
بسبب طبيعة الحركة النسبي يجب علينا كتابة قوانين التحريك داخل المعلم المطلق(مركز الكون) حتي تكون صحيحة، غير أن هذا غير ممكن (لشساعة الكون)، لكن باستطاعتنا إيجاد بديل تقريبي و واقعي يكون قريبا من الأرض و هو المعروف بمعلم كوبرنيك

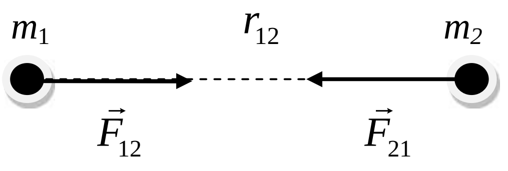
- معلم كوبرنيك : هو معلم مرتبط بالمجموعة الشمسية، مركزه هو مركز كتل المجموعة، و محاوره موجهة نحو نجوم بعيدة تعتبر من وجهة نظرنا ثابتة.
- **المعلم العطالي** : هو كل معلم نسبي بالنسبة للمعلم المطلق (معلم كوبرنيك)، تكتب فيه قوانين التحريك بنفس الشكل؛ و هذا يحدث في حالة الانسحاب المنتظم للمعلم النسبي؛ مجموعة هذه المعالم هي المعالم الغاليلية: (**معلم عطالي** = معلم غاليلي)، **كمثل على ذلك** :
  - **المعلم الشمسي المركزي** (Héliocentrique) مركزه هو مركز كتلة الشمس
  - **المعلم الأرضي المركزي** (Géocentrique) مركزه هو مركز كتلة الأرض
- التحريك الغاليلي : في هذا النوع من المعالم، تحافظ قوانين التحريك على نفس الشكل، و تكون مجموعة القوي المؤثرة في الجملة، كلها ناتجة عن تأثير الأجسام المحيطة بها.
- التحريك اللاغاليلي : يكون المعلم النسبي متسارعا بالنسبة للمعلم المطلق، وفي هذه الحالة يتغير شكل قوانين التحريك، فتظهر قوى إضافية جديدة ناتجة عن تسارع هذا المعلم.

3- القوى الفيزيائية و القوى العطالية : القوى الفيزيائية تظهر نتيجة تأثير الأجسام المحيطة بالجملة و تختفي باختفاء هذه الأجسام، بالمقابل تظهر قوى العطالة نتيجة تسارع المعلم النسبي و تختفي بانعدام هذا التسارع (**مثل** : قوة الطرد المركزي ، قوة الثقل الظاهري، ...).

4- القوى الفيزيائية الأساسية و غير الأساسية :
نصنف القوى الفيزيائية إلى صنفين مختلفين :

أ- قوى التأثير الأساسية : هي كل التأثيرات التي تغير سرعة الأجسام أو تشوه أشكالها، و التي لا يمكن استنتاجها من قوى أبسط منها، نميز القوى ذات التأثير عن بعد المحمولة بحقل (**إنتشار موجي**)، **و** المحمولة بجسيمات مرسلة مرتبطة. القوى الأساسية المعروفة حتى الآن هي من هذا النوع، و هي قوى مميزة، لها قوانين معروفة و محددة، حتى الآن تم تصنيفها إلى أربع قوى:

- قوة الجاذبية : هي القوة الوحيدة التي تتميز بالتأثير بعيد المدى(**مستوى الكون**)، غير أنها الأضعف من بين القوى الأخرى. وفق القانون الذي وضعه الفيزيائي (نيوتن في سنة 1684)، هي قوة تجاذب بين جسمين (1) **و** (2) لهما كتلتان (m_1) **و** (m_2)، **و تكتب من الشكل**:



$$\vec{F}_{12} = -G\,\frac{m_1 m_2}{r_{12}^{\;2}}\vec{U}_{12}$$

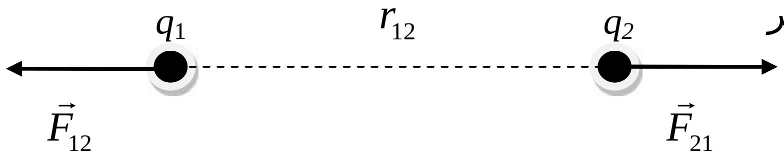
حيث: $G = 6.67\ 10^{-11}\ (m/Kg.S^2)$ ؛ يمثل ثابت الجاذبية

- <u>القوة الكهرمغنطيسية</u> : هي قوة التأثير الثانية من حيث الشدة، ناتجة عن تراكب القوى الكهربائية و المغنطيسية حسب الشكل الذي اقترحه الفيزيائي ماكسويل (سنة 1873). **ووفق القانون الذي** وضعه المهندس الكهربائي (**كولون** : Coulomb)، تظهر بين جسمين مشحونين (1) **و** (2) لهما **شحنتان** (q_1) **و** (q_2) **و تكتب من الشكل** :

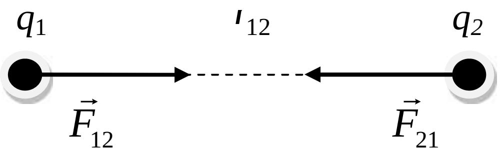
$$\vec{F}_{el-12} = K\,\frac{q_1 q_2}{r_{12}^{\;2}}\,\vec{U}_{12}$$

حيث: $K = 9\ 10^9\ (U.I)$ ؛ يمثل ثابت التأثير الكهربائي

-**في حالة** $q_1.q_2 > 0$ **تكون قوة تنافر**



-**في حالة** $q_1.q_2 < 0$ **تكون قوة تجاذب**



- <u>قوى التأثير النووي</u>: عادة تصنف إلى صنفين حسب شدتها و مدى تأثيرها و هي:

- <u>التأثيرات النووية الشديدة</u> : الأشد على الإطلاق، حيث أنها 100 **مرة أشد من القوة** الكهرمغنطيسية **و** 10^7 مرة أشد من القوى النووية الضعيفة، و 10^{38} مرة أشد من قوى الجاذبية. التأثيرات الشديدة مسؤولة عن توازن النواة(**تجمع البروتون**+ النيوترون)، غير أن مدى تأثيرها قصير جدا لا يتعدى النواة.
- <u>التأثيرات النووية الضعيفة</u> : ثاني أضعف قوة بعد الجاذبية، هي التي **تتسبب في انشطار** النيوترون(**الانشطار النووي) و تفاعلات الاندماج النووي التي تنتج إشعاع الشمس**

ب- <u>قوى التأثير غير الأساسية</u> : هي كل التأثيرات التي تغير سرعة الأجسام أو تشوه أشكالها، و **التي** يمكن اعتبارها بشكل ما كمحصلة لبعض القوى الأساسية، و أشهرها ما يعرف بقوى **الاحتكاك**.

II - <u>التحريك الغاليلي</u>:

- <u>تعريف</u> : نتكلم عن التحريك الغاليلي عندما نكتب معادلات الحركة داخل معلم عطالي، و في هذه الحالة، لا يمكن اعتبار إلا التأثيرات الناتجة عن الأجسام المتواجدة حول الجملة.

1- <u>كمية الحركة و قوانين التحريك</u> :

أ- <u>**كمية الحركة**</u> :

- تعريف : لتكن نقطة مادية M كتلتها m و سرعتها $\vec{V}$، نعرف كمية حركة النقطة ؛ و نرمز لها بـ $\vec{P}$ ؛ **بالمقدار** : $\boxed{\vec{P} = m\vec{V}}$ ، **لذلك** $m > 0$ **دائما** $\vec{P} // \vec{V}$

في حالة مجموعة N من النقاط المادية، كمية حركة الجملة $\vec{P}_{tot}$ **تكتب على شكل مجموع** :

$$\boxed{\vec{P}_{tot} = \sum_{i=1}^{N} \vec{P}_i = \sum_{i=1}^{N} m\vec{V}_i}$$

- **الجملة المعزولة** : نقول عن جملة فيزيائية أنها معزولة (**حرة**)، **إذا لم تكن** خاضعة لأي تأثير **خارجي** (بعيدة عن كل الأجسام الأخرى).
- مبدأ انحفاظ كمية الحركة : يعتبر من أكثر المبادئ أهمية في الفيزياء، يمكن صياغته كما يلي:

لتكن لدينا نقطتان ماديتان M_1 ، M_2 ؛ تملكان كتلتين m_2 ، m_1 على التوالي و كميتي حركة $\vec{P}_1$ ، $\vec{P}_2$ ، **تشكلان جملة معزولة، و لتكن اللحظتان** t ، t' :

* **عند اللحظة** t كمية حركة M_1 هي $\vec{P}_1$ كمية حركة M_2 هي $\vec{P}_2$

* **عند اللحظة** t' كمية حركة M_1 هي $\vec{P}_1'$ كمية حركة M_2 هي $\vec{P}_2'$

نتحقق دائما وفي كل الأحوال أن :

$$\boxed{\vec{P}_{tot} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \vec{P}_1' + \vec{P}_2' = \overrightarrow{Cte}}$$

******* " كمية حركة جملة معزولة محفوظة " *******

نستنتج من هذا المبدأ :

$$\boxed{\vec{P}_1' - \vec{P}_1 = -(\vec{P}_2' - \vec{P}_2) \Rightarrow \Delta\vec{P}_1 = -\Delta\vec{P}_2}$$

******* " تزايد كمية حركة M_1 يساوي تناقص كمية حركة M_2 " *******

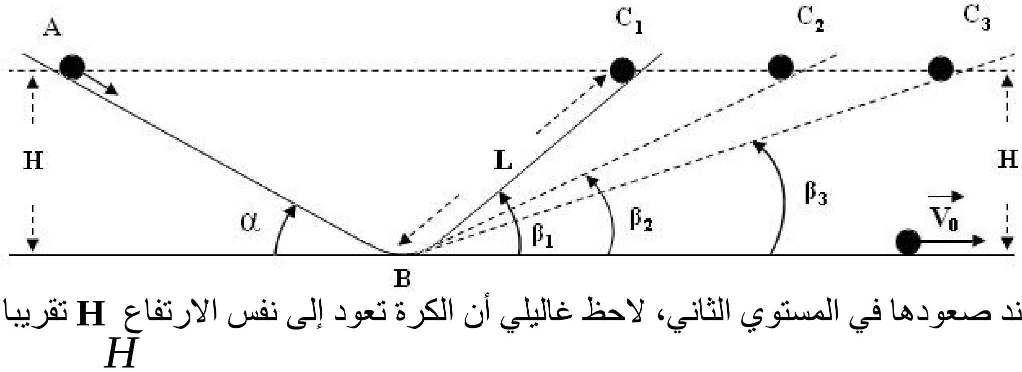
يمثل شكلا آخر لمبدأ انحفاظ كمية حركة الجملة، نقول أن هناك تبادل بين النقطتين و نسمي المقدار $\boxed{\vec{I} = \Delta\vec{P}}$ **بالدفع المستقبل من طرف النقطة.**

ب- **القوانين الأساسية للتحريك (قوانين نيوتن)** :

هي ثلاثة قوانين وضعها في شكلها النهائي الفيزيائي الانجليزي (إسحاق نيوتن)، ثم اشتهرت باسمه :

ب-1- **قانون العطالة (القانون الأول لنيوتن)**:

أول من نص هذا القانون على شكل مبدأ، هو الفلكي و الرياضي الإيطالي (غاليليو غاليلي) **من** خلال تجربة قام بها، حيث لاحظ حركة كرة معدنية صغيرة بين مستويين مائلين، الأول زاوية ميله α ثابتة، و الثاني زاوية ميله β متغيرة (**أنظر الشكل**):



عند صعودها في المستوي الثاني، لاحظ غاليلي أن الكرة تعود إلى نفس الارتفاع **H** تقريبا (**عندما** نهمل الاحتكاك)، و تكون المسافة التي قطعتها خلال الصعود تساوي : $L = \dfrac{H}{Sin(\quad)}$

هذه المسافة تزداد مع تناقص β، **و عندما** $\to 0$ ، **فإن** $L \to \infty$ و هذا يعني ببساطة **أن الحركة** مستقيمة منتظمة **و بالتالي وضع المبدأ من للشكل** :

***** " في حالة جسم غير خاضع لأي قوة خارجية، إذا كان ساكنا يحافظ " *****
***** " على سكونه، و إذا كان متحركا، تكون حركته مستقيمة منتظمة " *****

أما الصياغة الحديثة فتعتمد على مفهوم كمية الحركة، و مضمونها كما يلي :

**** " عندما يكون الجسم غير خاضع لأي تأثير خارجي، فإنه ينتقل بكمية حركة ثابتة " ****

$$\boxed{\vec{P}(t) = m\vec{V}(t) = \overrightarrow{Cte}}$$

بالنسبة للنقطة المادية، فإن كتلتها ثابتة لذلك تكون سرعتها ثابتة، و هو ما يوافق مبدأ غاليلي.
أما في حالة جسم مادي، فقد تكون كتلته غير ثابتة، و ينتج عن ذلك حالات جديدة لم تكن مفهومة في السابق، لكنها الآن تستعمل في عديد من القوانين و التقنيات، أشهرها قوة الدفع الذاتي، التي تسمح للمركبات الفضائية بالحركة خارج مجال الجاذبية.

ب-2- القانون الأساسي للتحريك (القانون الثاني لنيوتن):

مضمون المبدأ :

***** " إن تغير كمية حركة جسم مادي خلال وحدة الزمن، " *****
***** " يساوي محصلة القوى الخارجية المطبقة عليه " *****

$$\boxed{\vec{F}_{Ext} = \frac{d\vec{P}(t)}{dt}}$$

، **في حالة تكون الكتلة ثابتة نجد :**

$$\boxed{\vec{F}_{Ext} = m\,\frac{d\vec{V}(t)}{dt} = m\vec{\gamma}}$$

و هو ما يوافق الصيغة القديمة لقانون نيوتن.

ب-3- قانون الفعل و رد الفعل (القانون الثالث لنيوتن):

مضمون المبدأ :

***** " إن رد فعل جسم على فعل جسم آخر، يساوي " *****
***** " هذا الفعل في الشدة و يعاكسه في الاتجاه " *****

لنعتبر جملة معزولة مشكلة من نقطتين ماديتين M_1 ، M_2 ، لهما كميتي حركة $\vec{P}_1$ و $\vec{P}_2$.، هنا كمية حركة الجملة محفوظة :

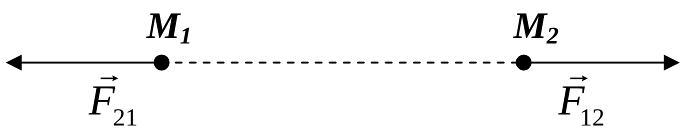
$$\vec{P}_{tot} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \overrightarrow{Cte}$$

نشتق بالنسبة للزمن :

$$\boxed{\frac{d\vec{P}_{tot}}{dt} = \frac{d\vec{P}_1}{dt} + \frac{d\vec{P}_2}{dt} = \vec{0}}$$

القوى الوحيدة المؤثرة هي القوى الداخلية :

- M_1 خاضعة لتأثير M_2 : $\vec{F}_{21} = \dfrac{d\vec{P}_1}{dt}$ ، و M_2 خاضعة لتأثير M_1 : $\vec{F}_{12} = \dfrac{d\vec{P}_2}{dt}$



مما يسمح لنا باستنتاج :

$$\boxed{\vec{F}_{21}+\vec{F}_{12}=\vec{0} \quad \Leftarrow \quad \vec{F}_{12}=-\vec{F}_{21}}$$

و نستنتج القاعدة العامة و التي تقول أن: **محصلة القوى الداخلية تكون دائما معدومة**

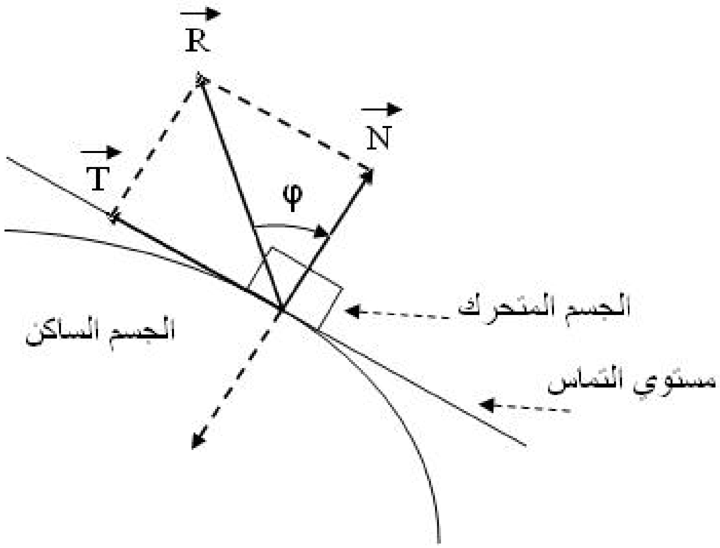
ج- قوى الاحتكاك :

هي قوى رد فعل لأجسام ساكنة، نتيجة تماسها مع الأجسام المتحركة، يكون اتجاهها معاكسا للحركة أو للسرعة، لذلك فهي قوى مقاومة، عموما نميز نوعين من الاحتكاك؛ ألاحتكاك الصلب (**احتكاك مع جسم صلب**)، و ألاحتكاك اللزج أو المائع (**احتكاك مع مائع :سائل أو غاز**)، **في كل الأحوال** يجب إضافة هذه القوى إلى مجموع القوى المؤثرة في الجملة.

التفسير ألمجهري للاحتكاك:

بالنظر إلى البنية المجهرية للمادة، نلاحظ أن التماس العياني بين الجسمين، ليس في الحقيقة تماس فعلي، بل تقترب الذرات في ما بينها لمسافات صغيرة جدا، (1-10 **أنغشتروم**). في هذا المستوي من التقارب، تظهر قوي مجهرية تعرف بقوى (**فان- در-فالز**) **ناتجة عن** التجاذب بين العزوم الكهربائية للذرات، تكون محصلتها العيانية هى قوى الاحتكاك.

ج-1- الاحتكاك الصلب :



يمكن أن نصنف رد فعل الجسم الساكن إلى **رد فعل ناظمي ناتج عن قوة مطبقة على** سطحه **من طرف الجسم المتحرك؛ كقوة الثقل أو ضغط** و التي تكون عمودية **على سطح التماس** بين الجسمين، هذه القوة **تكون دائما موجودة.**

في حالات معينة، يمكننا إضافة قوة ثانية تكون موازية لمستوي التماس و معاكسة **لاتجاه الحركة، تسمى رد الفعل المماسي (الاحتكاك).**

محصلة هاتين القوتين، تعطي رد فعل مائل $\vec{R}$ يصنع مع الناظم لسطح التماس زاوية φ .

لدينا : $\boxed{tg\varphi=\dfrac{T}{N}}$

عادة نسمي φ زاوية **الاحتكاك، و نعرف معامل الاحتكاك بالمقدار** : $\boxed{f=tg\varphi=\dfrac{T}{N}}$

نصادف نوعين من معاملات الاحتكاك :

- **معامل الاحتكاك الساكن** f_s : عندما يكون الجسم المتحرك ساكنا (قبل بداية الحركة) و قيمته تتزايد من الصفر حتى أكبر قيمة تكون عند بداية الحركة : $\boxed{f_s \rightarrow f_{s\,\lim}}$

- **معامل الاحتكاك الحركي** f_c : يملك قيمة ثابتة مهما تغيرت السرعة، و يكون أصغر من أكبر قيمة **لمعامل الاحتكاك الساكن** : $\boxed{f_c < f_{s\,\lim}}$

قيمة هذه المعاملات تتعلق بخشونة أو ملوسة **السطح الساكن** و بالطبيعة الكيميائية لمادة كل من السطحين: (حديد- حديد، حديد- **نحاس، خشب- زجاج،. . .** ..)

ج-2- <u>الاحتكاك اللزج</u> :

يحدث عندما يتحرك جسم صلب داخل مائع (سائل أو غاز)، و تكون قوة الاحتكاك دالة للسرعة و يتغير شكلها كلما تغيرت قيمة السرعة، عادة ما يكون معقدا جدا، فنلجأ لاستعمال التجربة لتحديد ذلك

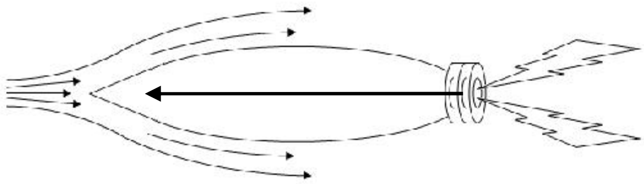
في بعض الحالات نجدها من الشكل : $\boxed{\|\vec{F}_V\| = -K\,\|\vec{V}\|^n}$ حيث n هو عدد طبيعي متزايد مع شدة السرعة، و K هو ثابت الاحتكاك اللزج.

من أجل السرعات الضعيفة يكون $n = 1$ ، مثل حالة سقوط كرة صغيرة تحت تأثير الجاذبية، داخل سائل ضعيف اللزوجة فتكتب القوة من الشكل : $\boxed{\vec{F}_V = -K.\vec{V}}$

و يكتب K من الشكل: $\boxed{K = 6® R ¦}$ تعرف هذه العلاقة بقانون ستوكس (Stokes)؛

حيث R : نصف قطر الكرة، ¦ يسمى معامل اللزوجة، و هو يتعلق بطبيعة و بدرجة حرارة السائل.

في مجال الديناميكية الهوائية (L'aérodynamique) و أساسا بالنسبة للطائرات و الصواريخ، حيث تتغير السرعة في مجال: (0.5 – 3 مرة سرعة الصوت) يتغير n بين (2 – 4)، وفي بعض الحالات يمكن كتابة القوة من الشكل : $\boxed{\|\vec{F}_V\| = -\sum_{n=1}^{P} K_n\,\|\vec{V}\|^n}$. حيث أن الثابت K_n يتغير بدلالة مساحة المقطع الرئيسي للجسم : (أكبر مقطع عمودي على اتجاه السرعة)، و للتقليل من شدة هذه القوة، تصنع هذه الآلات بأشكال انسيابية تسمح باختراق الهواء و دفعة إلى الجوانب.



شكل انسيابي: الهواء ينزاح على الجوانب

د- <u>كتلة العطالة وكتلة الثقالة</u> :

عندما أدخل نيوتن مفهوم الكتلة في قوانين التحريك، لم يحدد هذا المفهوم بشكل دقيق، حيث من خلال العلاقات الميكانيكية المتداولة، نجد معنيين مختلفين اختلافا أساسيا :

د-1- <u>كتلة العطالة</u>: إذا أخذنا كمية الحركة $\vec{P} = m\vec{V}$ أو القانون الأساسي للتحريك $\vec{F}_{Ext} = m¥$، فإن الكتلة تظهر مترافقة مع السرعة أو التسارع، أي بالحركة لذلك نسميها كتلة العطالة.

د-2- <u>كتلة الثقالة</u> : لنأخذ هذه المرة قانون الجاذبية العام $\vec{F}_{12} = -G\,\dfrac{m_1 m_2}{r_{12}^{\;2}}\vec{U}_{12}$ ، نلاحظ هنا أن الكتلتين هما اللتان أنتجتا هذه القوة، وبالتالي نسميهما كتلة الثقالة.

نلاحظ إذاً؛ أن المفهومين بعيدين تمام البعد، لا يمكن الخلط بينهما مطلقا، لكن تاريخيا تم اعتبارهما مقدارا واحدا يمثل كمية المادة داخل كل جسم.

د-3- <u>المساواة بين كتلة العطالة و كتلة الثقالة</u> :

نأخذ جسما يسقط عند سطح الأرض :

- من وجهة النظر الأولي لدينا : $¥ = \vec{g}$ و منه $\vec{F}_{ext} = m_{inerte}\,\vec{g}$

- من وجهة النظر ألثانية لدينا : $\vec{F}_{ext} = \vec{F}_{Grav} = -G\,\dfrac{m_{Pes} M_{Terre}}{R_{Terre}^2}\vec{U}_r$ ، **بالمقارنة**

بين العلاقتين نجد :

$$\boxed{m_{inerte} = G\,\frac{M_{Terre}}{g\,.R_{Terre}}\,m_{Pes}}$$

و المساواة بين الاثنتين يستلزم

أن : $G\,\dfrac{M_{Terre}}{g\,.R_{Terre}} = 1$ مما يسمح بحساب ثابت الجاذبية G ، لدينا المعطيات الفلكية للأرض :

$M_{Terre} = 5.98\;10^{24}\,Kg$ و $R_{Terre} = 6400Km$ فنجد قيمة الثابت :

$$\boxed{G = 6.67\;10^{-11}\;m\,/\,Kg\,.S^2}$$

كما نرى، فإن افتراض الكتلتين متساويتان، هو الذي سمح بتحديد هذه القيمة لثابت الجاذبية، و أي افتراض آخر سوف يعطي قيمة مختلفة له.

1- <u>العزم الحركي</u> :

أ- <u>تعريف</u> : لدينا نقطة مادية M، كمية حركتها $\vec{P} = m\vec{V}$ **و لتكن النقطة** O ؛ **نعرف العزم** الحركي لهذه النقطة، على أنه عزم كمية الحركة بالنسبة للنقطة O :

$$\boxed{\vec{L}_o = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P}}$$

في حالة مجموعة نقاط مادية، العزم الحركي المحصل هو المجموع الشعاعي لكل عزوم النقاط :

$$\boxed{\vec{L}_{Tot} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + ... + \vec{L}_N = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{OM}_i \wedge \vec{P}_i}$$

ب- <u>إنحفاظ العزم الحركي</u> :

- نظرية العزم الحركي : نلاحظ من التعريف أن العزم الحركي يتعلق بالنقطة O و يتغير معها، لنحسب مشتقته بالنسبة للزمن :

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \wedge \vec{P} + \overrightarrow{OM} \wedge \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{V} \wedge \vec{P} + \overrightarrow{OM} \wedge \frac{d\vec{P}}{dt}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}_{Ext}}$$

مضمون النظرية :

***** " **إن مشتقة العزم الحركي بالنسبة للنقطة O بدلالة الزمن تساوي** " *****

***** " دائما عزم محصلة القوى الخارجية بالنسبة **لهذه النقطة** " *****

من هذه العلاقة نستطيع تحديد متى يكون العزم الحركي معدوما :

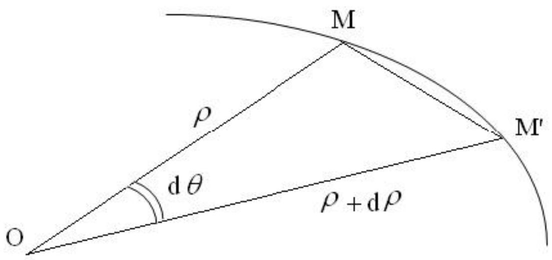
- في حالة $\vec{F}_{Ext} = \vec{0}$ أي الجملة معزولة و هي نتيجة سبق و رأيناها أعلى
- في حالة $\vec{F}_{Ext} \,//\, \overrightarrow{OM}$ أي أن القوة المطبقة مركزية و مركزها O، هذه الحالة جديدة لا يمكن معالجتها إلا باستعمال العزم الحركي.

العزم الحركي ثابت أي : $\vec{L} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} = \vec{L}_o = \overrightarrow{Cte}$ يعني أن :

$$\boxed{(\overrightarrow{OM}, \vec{P}) \Leftarrow \vec{L}_o \perp (\overrightarrow{OM}, \vec{P})}$$

توجدان في المستوي العمودي على $\vec{L}_o = \overrightarrow{Cte}$ و بالتالي فالحركة مستوية

- حالة القوة المركزية : يجب أن نختار مركز القوة متطابقا مع مركز الإحداثيات، سبق و وجدنا في فصل الحركة أن سرعة المسح



حيث أن $\boxed{\dfrac{dS}{dt} = \frac{1}{2} \| \overrightarrow{OM} \wedge \vec{V} \| = \frac{1}{2} C}$

C هي ثابت المساحات، بالمقابل لدينا :

$\| \vec{L} \| = mC$ فنجد في الأخير العلاقة :

$$\boxed{\dfrac{dS}{dt} = \frac{1}{2} \dfrac{\| \vec{L} \|}{m}}$$

و هي العلاقة الأساسية للقوى المركزية، من جهة أخرى لدينا

$\overrightarrow{OM} = \rho \,\vec{U}_\rho$ و $\vec{V} = \dot{\rho}\,\vec{U}_\rho + \rho\dot{\theta}\,\vec{U}_\theta$ و منه $\overrightarrow{OM} \wedge \vec{V} = (\rho^2 \dot{\theta}).\vec{k}$

و في الأخير نحصل على :

$$\boxed{\| \vec{L} \| = \| \vec{L}_0 \| = mC = m\rho^2\dot{\theta}}$$

هذا المقدار يعتبر ثابتا من ثوابت الحركة، قيمته الابتدائية تحدد طبيعتها و شكل المسار.

ج- تطبيق : حركة الكواكب :

ج-1- قوانين كبلر (Kepler) :

قام كبلر بملاحظة معظم كواكب المجموعة الشمسية، مستفيدا ممن سبقوه (كوبرنيك و غاليلي، ...)، ثم استخرج القوانين الثلاثة المشهورة باسمه :

* القانون الأول لكبلر : (قانون المدارات)

*** " مسارات (مدارات) الكواكب حول الشمس، عبارة عن قطوع ناقصة (إهليج)، تقع الشمس في أحد بؤرتيه " ***

* القانون الثاني لكبلر : (قانون المساحات)

*** " شعاع الموقع، الذي يربط بين الكوكب و الشمس، " ***

*** " يمسح مساحات متساوية في أزمنة متساوية " ***

* **القانون الثالث لكبلر** : (<u>قانون الدوران</u>)

*** " مربع الزمن الذي يستغرقه الكوكب ليقطع مداره (**سنة الكوكب**)، " ***

*** " يتناسب مع مكعب نصف القطر الكبير لمداره " ***

إذا كانت الكواكب هي : $P_1, P_2, P_3, \ldots\ldots, P_{n-1}, P_n$ ، **نحصل على العلاقات** :

$$\boxed{\frac{T_1^2}{a_1^3}=\frac{T_2^2}{a_2^3}=\frac{T_3^2}{a_3^3}=\ldots=\frac{T_{n-1}^2}{a_{n-1}^3}=\frac{T_n^2}{a_n^3}=Cte}$$

ج-2- <u>استخراج معادلة المسار</u> :

القوة التي تؤثر بها الشمس على الكواكب هي قوة مركزية من الشكل : $\vec{F}=-f(r)\vec{U}_r$

مع : $f(r)=G\dfrac{m_p.M_{Soleil}}{r^2}$ ، **و التسارع مركزي من الشكل** :

$\vec{\gamma}=\gamma_r.\vec{U}_r=\left(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\right)\vec{U}_r$ ، **لندخل ثابت المساحات** $C=r^2\dot{\theta}$ في هذه العلاقة :

فنجد : $$\boxed{\frac{dr}{dt}=\frac{dr}{d\theta}\times\frac{d\theta}{dt}=\frac{C}{r^2}\times\frac{dr}{d\theta}=-C\frac{d\,(1/r)}{d\theta}}$$ **و بنفس الأسلوب** ،

نجد : $$\boxed{\ddot{r}=\frac{d^2r}{dt^2}=-\frac{C^2}{r^2}\times\frac{d^2\,(1/r)}{d\theta^2}}$$ ، **ثم من ثابت المساحات نجد** : $r\dot{\theta}^2=\dfrac{C^2}{r^3}$ ،

وبالتعويض في معادلة الحركة : $\vec{F}_{grav}=m\vec{\gamma}$ ، لنجد في آخر المطاف علاقة مشهورة، تعرف بعلاقة بيني (***Binet***)، و التي تعطي قيمة القوة المركزية، عندما تكون معادلة المسار في الإحداثيات **القطبية** معروفة :

$$\boxed{f(r)=\frac{m_pC^2}{r^2}\left[\frac{d^2\,(1/r)}{d\theta^2}+\frac{1}{r}\right]}$$

في حالة قوة الجاذبية، تصبح العلاقة :

$$\frac{m_pC^2}{r^2}\left[\frac{d^2\,(1/r)}{d\theta^2}+\frac{1}{r}\right]=G\frac{m_p.M_{Soleil}}{r^2}$$

إذا وضعنا $U = \frac{1}{\circ}$ ، نحصل على المعادلة التفاضلية النهائية :

$$\boxed{\frac{d^2U}{dt^2} + U = G\,\frac{M_{soleil}}{C^2}}$$

حلها قطع يتعلق بالثابت $K = \frac{C^2}{GM_{Soleil}}$ و يكتب كما يلي :

$$\boxed{\circ = \frac{K}{1 + K.A.Cos(\bar{\ } + \bar{\ }_0)}}$$

حيث أن A و $\bar{\ }_0$ ثوابت تحدد طبيعة المسار:

- إذا كان $\left|\frac{AC^2}{GM_{Soleil}}\right| < 1$ **نحصل على قطع ناقص** (إهليج) و هو حالة **الكواكب**

- إذا كان $\left|\frac{AC^2}{GM_{Soleil}}\right| > 1$ **نحصل على قطع** زائد و يكون المسار مفتوحا مثل المذنبات

- إذا كان $\left|\frac{AC^2}{GM_{Soleil}}\right| = 1$ **نجد قطعا** مكافئا و المسار مفتوح و هي حالة حدية بين الأولى

الفصل السادس: العمل و الطاقة الميكانيكية

I- العمل و الطاقة الحركية:

1- عمل قوة ميكانيكية :

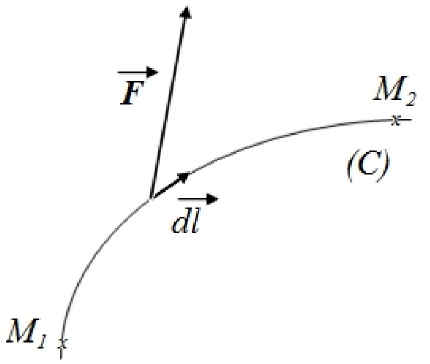
أ- تعريف :

لتكن نقطة مادية M كتلتها m، تتحرك على مسار (C) تحت تأثير قوة $\vec{F}$ ،

- عند اللحظة t : النقطة المتحركة توجد عند النقطة M
- " " $t+dt$: " " " " M'

تكون النقطة انتقلت لمسافة عنصرية :

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{dOM} = \overrightarrow{dl}$$



نعرف العمل الميكانيكي العنصري المنجز

من طرف القوة $\vec{F}$ خلال هذا الانتقال، بالمقدار :

$$dW = \vec{F}.\overrightarrow{MM'} = \vec{F}.\overrightarrow{dl}$$

عندما تنتقل النقطة المتحركة بين M_1 و M_2 ،
يكون العمل المحصل المنجز هو:

$$W_{M_1 \to M_2} = \int_{M_1}^{M_2} dW = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F}.\overrightarrow{dl}$$

عندما تخضع النقطة M إلى تأثير مجموعة قوى $\vec{F}_N \,, \,..... \,, \vec{F}_3 \,, \vec{F}_2 \,, \vec{F}_1$ ، يكون العمل العنصري المنجز:

$$\begin{aligned} dW &= \left[\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + ... + \vec{F}_N \right].\overrightarrow{dl} \\ &= dW_1 + dW_2 + dW_3 + ... + dW_N \\ &= \sum_{i=1}^{N} dW_i \end{aligned}$$

و بنفس الشكل نحصل على العمل المحصل المنجز بين M_1 و M_2 :

$$W_{Tot} = W_1 + W_2 + W_3 + ... + W_N = \sum_{i=1}^{N} W_i$$

ب- العبارة التحليلية للعمل :

- في الإحداثيات الديكارتية :

نكتب القوة من الشكل : $\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$

و نكتب الانتقال العنصري : $\overrightarrow{dl} = dx.\vec{i} + dy.\vec{j} + dz.\vec{k}$

فنحصل على العبارة التحليلية للعمل العنصري : $dW = \vec{F}.\overrightarrow{dl}$

$$dW = F_x.dx + F_y.dy + F_z.dz$$

خلال الانتقال بين M_1 و M_2 ، يكون العمل المحصل المنجز :

$$W_{M_1\to M_2} = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F}.\overrightarrow{dl} = \int_{x_1}^{x_2} F_x.dx + \int_{y_1}^{y_2} F_y.dy + \int_{z_1}^{z_2} F_z.dz$$

- **ملاحظة** : في هذه العبارة، كل التكاملات أحادية و ما داخلها يجب أن يكتب بدلالة متغير واحد، مثلا، الحد الأول نكتبه بدلالة x فقط، الحد الثاني بدلالة y فقط، و الحد الثالث بدلالة z فقط. لأجل ذلك سوف نستعمل معادلة المسار التي تعطينا العلاقة بين المتغيرات **$f(x,y,z) = 0$** .

- في الإحداثيات القطبية :

في هذه الحالة كل من القوة و الانتقال يقعان داخل المستوي و نكتبهما كما يلي :

- عبارة القوة : $\vec{F} = F_\rho.\overrightarrow{U_\rho} + F_\theta.\overrightarrow{U_\theta}$

- عبارة الانتقال العنصري : $\overrightarrow{dl} = (d\rho).\overrightarrow{U_\rho} + (\rho d\theta).\overrightarrow{U_\theta}$

و نحصل نتيجة لذلك على عبارة العمل العنصري :

$$dW = \vec{F}.\overrightarrow{dl} = (F_\rho d\rho) + (\rho F_\theta d\theta)$$

العمل المحصل المنجز بين M_1 و M_2 ، يكتب :

$$W_{M_1\to M_2} = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F}.\overrightarrow{dl} = \int_{\rho_1}^{\rho_2} F_\rho.d\rho + \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho F_\theta.d\theta$$

هنا كذلك يجب أن نكتب ما داخل كل تكامل، بدلالة متغير واحد، فنستعمل كل مرة العلاقة بين ρ و θ في معادلة المسار $f(\rho,\theta) = 0$.

- في الإحداثيات المنحنية (الذاتية) :

القوة تكتب من الشكل : $\vec{F} = F_T.\overrightarrow{U_T} + F_N.\overrightarrow{U_N} + F_{\perp}.\vec{k}$

والانتقال يكتب من الشكل : $\overrightarrow{dl} = d\overrightarrow{OM} = \vec{V}.dt = \|\vec{V}\|.dt.\overrightarrow{U_T}$

لنحصل في الأخير على عبارة العمل العنصري :

$$dW = F_T.\|\vec{V}\|.dt$$

- **ملاحظة** : من هذه النتيجة نستنتج أن، مركبات القوة العمودية على شعاع السرعة لا تنجز أي عمل ميكانيكي، و المركبة الموازية للسرعة هي الوحيدة التي تنتج العمل.

على سبيل المثال، نذكر :

- قوة كوريوليس : $\vec{F}_C = 2m.(\vec{\omega} \wedge \vec{V})$

- قوة لابلاس (المغنطيسية) : $\vec{F}_{mag} = q.(\vec{B} \wedge \vec{V})$

هذه القوى لا تنجز أعمالا،لأنها لا تغير في قيمة السرعة غير أنها تغير في اتجاها، فيحدث دوران، ويكون المسار دائريا.

ج- وحدة العمل :

- الوحدة الدولية (نظام : متر - كلغ - ثا - أمبير $MKSA$)

$$[\text{العمل}]=[\text{القوة}].[\text{الإنتقال}]$$

$[\text{جول}]=[\text{نيوتن}].[\text{متر}] = \frac{[\text{كلغ}].[\text{م}^2]}{[\text{ثا}^2]}$ أو $[Joule]=[N][M] = \frac{[Kg].[M]^2}{[S]^2}$

- الوحدة الدولية (نظام : سم- غ - ثا CGS)

مع : $[\text{نيوتن}]=[10^5].[\text{داين}]$ أو $[N] = 10^5.[Dyne]$

$[\text{إرج}]=[\text{داين}].[\text{سم}] = \frac{[\text{غ}].[\text{سم}^2]}{[\text{ثا}^2]}$ أو $[erg]=[Dyne].[Cm] = \frac{[g].[Cm]^2}{[S]^2}$

و: $[\text{جول}] = [10^7].[\text{إرج}]$ أو $[Joule] = [10^7].[erg]$

- الوحدة الذرية (نظام : أنغشتروم- وحدة الكتل الذرية - 10^{-15}.ثا)

وهو يمثل العمل المنجز لنقل إلكترون تحت تأثير حقل كهربائي شدته $1\ \frac{\text{Volt}}{\text{Metre}}$ ، لمسافة 1 متر:

$$[\text{إلكترون} - \text{فولط}]=[e.V]=[1{,}6x10^{-19}].[\text{جول}]$$

$$[Electron - Volt]=[e.V] = 1{,}6x10^{-19}.[Joule]$$

د- الاستطاعة أو القدرة :

مفهوم يستعمل في المجال التقني حيث يتم الاهتمام بمردود الآلات الميكانيكية، لذلك يتم مقارنة هذه الآلات بما تنجزه من أعمال خلال وحدة الزمن، فنعرف :

" الاستطاعة هي العمل المنجز من طرف الآلة خلال وحدة الزمن " ،

و نرمز لها بالرمز:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F}.\overrightarrow{dl}}{dt} = \vec{F}.\frac{\overrightarrow{dl}}{dt} = \vec{F}.\vec{V}$$

- وحدة الاستطاعة :

[واط]=[جول] \ [ثا] أو $[Watt]=[Joule]/[S]$

هناك وحدات مشتقة منها :

- الكيلوواط $(KiloWatt = 10^{+3}\ Watt)$ و الميغواط $(MegaWatt = 10^{+6}\ Watt)$

في المجال الصناعي الكهربائي نستعمل وحدة خاصة للعمل مرتبطة باستطاعة الآلة :

- واطـ ساعة : يمثل العمل المنجز من طرف آلة استطاعتها 1واط، مدة ساعة واحدة، وهي تساوي:

- واطـ ساعة = 3600 واط $Watt\text{-}heure = 3600\ Watt$

و لها مضعفات : - كلواطـ ساعة = 3600.1000 واطـ ساعة = $3.6\ 10^{+6}$ واطـ ساعة

- ميغاواطـ ساعة = 3600.10^{+6} واطـ ساعة = $3.6\ 10^{+9}$ واطـ ساعة

- جيغاواطـ ساعة = 3600.10^{+9} واطـ ساعة = $3.6\ 10^{+12}$ واطـ ساعة

هـ- مثال: عمل قوة الجاذبية :

قوة جاذبية الأرض تكتب في جملة الإحداثيات القطبية

من الشكل :

$$\vec{F}_g = -G.\frac{m.M_{terre}}{\rho^2}.\vec{U}_\rho$$

لذلك فهي تملك مركبة واحدة $(F_\theta = 0)$ و العمل المنجز بين البعدين (ρ_1 , ρ_2) هو:

$$W_{\rho_1 \to \rho_2} = \int_{\rho_1}^{\rho_2} F_\rho . d\rho = \int_{\rho_1}^{\rho_2} -G\frac{m.M_{terre}}{\rho^2}.d\rho$$

$$= \left[G.\frac{m.M_{terre}}{\rho} \right]_{\rho_1}^{\rho_2} = G.m.M_{terre}.\left[\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} \right]$$

في حالة السقوط الحر من الارتفاع h عن سطح الأرض فإننا نجد :

$$\rho_1 = R_T + h \ , \ \rho_2 = R_T$$

و العمل المنجز من الارتفاع h يتبسط إلى الشكل :

$$W(h) = G.m.M_{terre}.\left[\frac{(R_T+h)-R_T}{(R_T+h).R_T}\right] = G.m.M_{terre}.\left[\frac{h}{(R_T+h).R_T}\right]$$

$$= \frac{G.m.M_{terre}}{R_T^{\ 2}}.\quad \frac{h}{(1+\frac{h}{R_T})} \quad = \frac{G.m.M_{terre}}{R_T^{\ 2}}.h.\left[1+\frac{h}{R_T}\right]^{-1}$$

في حالة السقوط الحر يكون h صغيرا جدا أمام نصف قطر الأرض، مما يسمح بتقريب العبارة :

$$W(h) = m.\left(\frac{G.M_{terre}}{R_T^{\ 2}}\right).\left[h-\frac{h^2}{R_T}\right] = m.g_0.\left[h-\frac{h^2}{R_T}\right]$$

عندما يكون h صغيرا جدا نحصل الشكل المعروف لعمل قوة الثقل: $W(h) = m.g_0 h$

2 - <u>الطاقة الحركية :</u>

ا- تعريف : لقد سبق و عرفنا عمل قوة ميكانيكية تحرك نقطة مادية كتلتها m بالعلاقة :

$$dW \ = \vec{F}.\overrightarrow{dl}$$

بإدخال القانون الأساسي للتحريك : $\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$ و $\vec{dl} = \vec{V}.dt$ نكتب العمل من الشكل :

$$dW \ = \vec{F}.\overrightarrow{dl} = \frac{d\vec{P}}{dt}.\ \vec{V}.dt = d\vec{P}.\ \vec{V}$$

و بإدخال الكتلة :

$$dW \ = d\vec{P}.\ \vec{V} = d\vec{P}.\frac{\vec{P}}{m} = \tfrac{1}{2}\frac{d\vec{P}^2}{m}$$

في حالة الكتلة ثابتة نجد :

$$dW \ = d\left(\frac{\vec{P}^2}{2m}\right)$$

نعرف الطاقة الحركية للنقطة المتحركة بالمقدار :

$$E_C \ = \ \frac{\vec{P}^2}{2m} = \tfrac{1}{2}m\vec{V}^2$$

وهي تتعلق بقيمة السرعة فقط دون اتجاهها. يمكن أن نعوض السرعة بمركباتها في أي نظام إحداثيات، سواء الديكارتية أو القطبية أو غيرها.

ب- نظرية (قانون) الطاقة الحركية : من العلاقة السابقة : $dW = dE_C = d\left(\dfrac{\vec{P}^2}{2m}\right)$

يمكن أن نكتب العمل المنجز بين النقطتين ***M₁* , *M2*** :

$$W_{M_1 \to M_2} = \int_{M_1}^{M_2} dE_C = \left[\; E_C(M_2) \;-\; E_C(M_1) \;\right]$$

أو نبسطها من الشكل : $W_{M_1 \to M_2} = \Delta E_C$

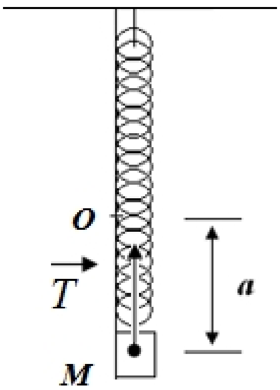
" إن العمل المنجز من طرف القوة $\vec{F}$ بين النقطتين M_1 , $M2$
يساوي تغير الطاقة الحركية بين هاتين النقطتين ".

- <u>مثال 1:</u> في حالة نابض مرن ثابت مرونته ***K*** فإن قوة التوتر الناتجة عن شده لمسافة x تكتب من الشكل :

$$F = -K.x$$

- أحسب سرعة الكتلة ***m*** عندما تمر على التوالي
بالمواقع : $x_1 = 0,\; -a,\; 0,\; +a$

- الحل : نكتب نظرية الطاقة الحركية بين نقطة البداية $M_1(x=a)$ ، و النهاية $M_2(x_2=0,\ -a,\ \ a)$
فنجد :



$$W_{M_1 \to M_2} = \int_{M_1}^{M_2} F.dx = \int_{a}^{x_2} (-Kx).dx$$

$$= -\left[\tfrac{1}{2} Kx_2 \text{ - } \tfrac{1}{2} Ka\right] = E_C(M_1) - E_C(M_2)$$

في البداية نترك الكتلة بدون سرعة ابتدائية أي $E_C(a) = 0$ ، و $E_C(M_2) = \tfrac{1}{2} m.\vec{V}_2^{\,2}$

لنجد في الأخير العلاقة : $-\left[\tfrac{1}{2} Kx_2 \text{ - } \tfrac{1}{2} Ka\right] = -\tfrac{1}{2} m.\vec{V}_2^{\,2}$ ، و تكون

عبارة السرعة النهائية من الشكل : $V_2(x_2) = \sqrt{\dfrac{K}{m}\left[a^2 - x_2^{\,2}\right]}$

- <u>مثال 2:</u> في حالة سقوط جسم بدون سرعة ابتدائية، تحت تأثير قوة الجاذبية :

$$\vec{F}_g = -G.\frac{m.M_{terre}}{\rho^2}.\vec{U}_\rho$$

أحسب سرعته عند اصطدامه بالأرض.

ـ الحل :

$$W_{\rho_1 \to \rho_2} = \int_{\rho_1}^{\rho_2} F_\rho . d\rho = \int_{\rho_1}^{\rho_2} -G \frac{m.M_{terre}}{\rho^2} . d\rho$$

$$= \left[G . \frac{m.M_{terre}}{\rho} \right]_{\rho_1}^{\rho_2} = G.m.M_{terre} . \left[\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} \right]$$

و تغير الطاقة الحركية : $W_{M_1 \to M_2} = \Delta E_C = \frac{1}{2} m.\vec{V}_2^{\,2}$

و سرعة الارتطام : $V_2 = \sqrt{2GM \left[\frac{r - R_T}{r.R_T} \right]}$

II - **الطاقة الكامنة**:

ا- الحقل السلمي و الحقل ألشعاعي :

لدينا حيزا من الفضاء [V] ، و لتكن النقطة الهندسية ***M*** تنتمي له، نقول أننا عرفنا حقلا داخل هذا الحيز، إذا أرفقنا بكل نقطة ***M*** مقدارا $E = E(x, y, z)$ يكون دالة لهذا الموقع، نسميه قيمة الحقل.

- عندما يكون $E = E(x, y, z)$ مقدارا سلميا، نقول إن الحقل سلمي
- و عندما يكون $\vec{E} = \vec{E}(x, y, z)$ مقدارا شعاعيا، نقول إن الحقل شعاعي

بهذا المفهوم يمكن اعتبار الحقل دالة لإحداثيات النقطة $M(x, y, z)$ ، أي دالة متعددة المتغيرات، يمكننا بالتالي تعريف المشتقات الجزئية بالنسبة لمتغير x ، أو y ، أو z .

ب- العلاقة بين القوة و الطاقة الكامنة :

ـ القوة المحافظة و القوة غير المحافظة :

لتكن القوة $\vec{F}$ ، تنجز عملا ميكانيكيا عبر المسلك ***(C)*** بين النقطتين M_1 و M_2 ، قيمته :

$$W_{M_1 \to M_2} = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F} . \vec{dl}$$

قيمة هذا التكامل يمكن أن تكون :

ـ لا تتعلق بالمسلك ***(C)*** المتبع من طرف المتحرك، بينما تتعلق بالنقطتين M_1 و M_2 ، هذه الخاصية تتحقق عندما نستطيع أن نجد دالة حقل سلمي بحيث نكتب :

$$H = H(x, y, z) \qquad \text{مع} \qquad dW = \vec{F} . \vec{dl} = dH$$

باستعمال هذه العلاقة داخل التكامل نجد :

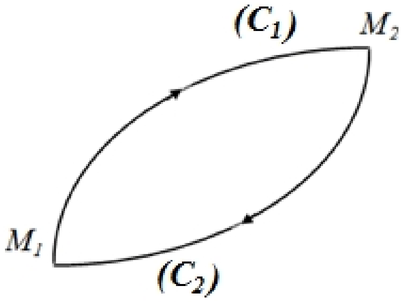
$$W_{M_1\to M_2}=\int_{M_1}^{M_2}\vec{F}.\vec{dl}=\int_{M_1}^{M_2}dH=\left[H(M_1)-H(M_2)\right]$$

كما نرى النتيجة المتحصل عليها غير متعلقة بالمسلك (C) ، نقول في هذه الحالة أن القوة $\vec{F}$ مشتقة من كمون أو أنها محافظة.
لأسباب تاريخية و عملية، تم تعريف دالة الحقل السلمي من الشكل :

$$dW=\vec{F}.\vec{dl}=-\,dE_P$$

ليكتب العمل المنجز من الشكل :

$$W_{M_1\to M_2}=\int_{M_1}^{M_2}\vec{F}.\vec{dl}=-\int_{M_1}^{M_2}dE_P=\left[E_P(M_1)-E_P(M_2)\right]$$



نسمي دالة الحقل السلمي E_P : الطاقة الكامنة المنتجة لحقل القوة $\vec{F}$. إذا أخذنا مسلكين (C_1) و (C_2) يشكلان مع بعض مسلكا مغلقا كما نرى على الشكل:

نحسب العمل الكلي من $M_1\to M_2\to M_1$:

$$W_{M_1\to M_2\to M_1}=\int_{(C_1)\,M_1}^{M_2}\vec{F}.\vec{dl}+\int_{(C_2)\,M_2}^{M_1}\vec{F}.\vec{dl}$$

$$=-\int_{(C_1)\,M_1}^{M_2}dE_P-\int_{(C_2)\,M_2}^{M_1}dE_P$$

$$W_{M_1\to M_2\to M_1}=\left[E_P(M_1)-E_P(M_2)\right]_{(C_1)}+\left[E_P(M_2)-E_P(M_1)\right]_{(C_2)}=0$$

قاعدة 1 : " نقول عن قوة $\vec{F}$ أنها محافظة، إذا كان عملها المنجز عبر مسلك مغلق كيفي، معدوما ".

كمثال على القوى المحافظة، قوة الثقل أو قوة الجاذبية العامة، القوة الكهربائية، و على العموم كل ما يسمى بقوى الحقل.

- تتعلق بالمسلك (C) المتبع من طرف المتحرك، و تتعلق كذلك بالنقطتين M_1 و M_2 ، هذه الحالة تحدث عندما لا نستطيع إيجاد دالة حقل سلمي $H=H(x,y,z)$ بحيث يكتب العمل المنجز كما رئينا، لذلك نكتب العمل العنصري :

$$H = H(x,y,z) \qquad \text{مع} \qquad dW = \overrightarrow{F}.\overrightarrow{dl} \neq dH$$

نقول في هذه الحالة أن القوة $\vec{F}$ غير محافظة أو غير مشتقة من كمون.

إذا أخذنا المسلكين السابقين (C_1) و (C_2) اللذان يشكلان مسلكا مغلقا يكون العمل المحصل :

$$W_{M_1 \to M_2 \to M_1} = \int_{(C_1)\,M_1}^{M_2} \overrightarrow{F}.\overrightarrow{dl} + \int_{(C_2)\,M_2}^{M_1} \overrightarrow{F}.\overrightarrow{dl} \neq \oint_{(C_1+C_2)} dH \neq 0$$

أي أن :

$$W_{M_1 \to M_2 \to M_1} = W_1 + W_2 \neq 0$$

<u>قاعدة 2</u> : " <u>نقول عن قوة $\vec{F}$ أنها غير محافظة، إذا كان عملها المنجز عبر مسلك مغلق كيفي غير معدوما</u> ".

غالبا، القوى غير المحافظة هي قوى الإحتكاك، التي تقاوم حركة الأجسام، و تكون مسؤولة عن تعطيل الحركة و تخامدها، و تؤدي إلى تبديد الطاقة الحركية (ضياع أو تحويل غير مفيد) إلى حرارة تضيع في الوسط المحيط ، و تغتبر المستهلك الأساسي للطاقة المستخدمة.

- <u>الطاقة الكامنة لحقل قوة محافظ</u> :

ليكن حقل القوة المحافظ $\vec{F}\ (x,y,z)$ ، النقطة المتحركة M على المسلك (C) بين النقطتين M_1 و M_2 ، نكتب العمل العنصري المنجز من الشكل :

$$dW = \vec{F}.\overrightarrow{dl} = F_x.dx + F_y.dy + F_z.dz$$

بما أن القوة $\vec{F}$ محافظة، نستطيع كتابة العمل العنصري من الشكل :

$$dW = \vec{F}.\overrightarrow{dl} = -dE_P$$

الطاقة الكامنة هي دالة للمتغيرات (x,y,z) ، يكتب تفاضلها بدلالة هذه المتغيرات من الشكل :

$$dE_P = \frac{\partial E_P}{\partial x}dx + \frac{\partial E_P}{\partial y}dy + \frac{\partial E_P}{\partial z}dz$$

لأن المتغيرات (x,y,z) مستقلة، فإن علاقة العمل لا تتحقق دائما إلا إذا كان :

$$\vec{F} = \begin{cases} F_x = -\dfrac{\partial E_P}{\partial x} \\ F_y = -\dfrac{\partial E_P}{\partial y} \\ F_z = -\dfrac{\partial E_P}{\partial z} \end{cases} \qquad \text{أو} \qquad \vec{F} = -\frac{\partial E_P}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial E_P}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial E_P}{\partial z}\vec{k}$$

و الذي يكتب مختصرا على الشكل : $\vec{F}=-\overrightarrow{grd}(E_P)$

الرمز $\overrightarrow{grd}$ هو اختصار لكلمة *gradient* أو كلمة التدرج و التي تعني التغير، هذا الرمز يستعمل كثيرا في الرياضيات و يسطلح عليه باسم المؤثر التفاضلي Opérateur differentiel ، و هو يشبه المشتقة لكن في حالة الحقل السلمي و الشعاعي، أي أنه مفهوم أوسع من المشتقة. سنصادف في دروس قادمة أشكالا أخرى من هذا النوع من العمليات.

الدالة الحقل السلمي $E_P(x,y,z)$ تسمى : الطاقة الكامنة التي تشتق منها القوة $\vec{F}$
في هذه الحالة لدينا دائما :

$$W_{M_1\to M_2}=-\Delta E_P=[E_P\ (M_1)-E_P\ (M_2)]$$

<u>قاعدة 3</u> : " <u>العمل المنجز من طرف القوة $\vec{F}$ المشتقة من الكمون أو الطاقة الكامنة E_P بين النقطتين M_1 و M_2 ، يساوي دائما تناقص الطاقة الكامنة بين هاتين النقطتين</u> ".

لقد تم تعريف هذه الدالة انطلاقا من معادلة تفاضلية للعمل العنصري، و نتيجة لذلك عندما نكاملها يجب إضافة ثابت عددي كيفي C ، غير أن هذا الثابت لا يؤثر، لأن تغير هذه الدالة هو الذي يملك معنى فيزيائي.

- <u>خاصية القوة المحافظة</u> :

رأينا أن القوة المحافظة تستخرج من الطاقة الكامنة باستعمال الاشتقاق، أي أن الدالة $E_P(x,y,z)$ يجب أن تحقق شروطا رياضية أهمها أن تكون:
- مستمرة في مجال التعريف
- تقبل الاشتقاق حتى الدرجة الثانية على الأقل

المشتقات الأولى تعطينا مركبات القوة، ماذا تعطينا المشتقات الثانية، سوف نجد نوعين :

* النوع الأول : يتعلق بمتغير واحد فقط : $\dfrac{\partial^2 E_P}{\partial x^2}\ ,\ \dfrac{\partial^2 E_P}{\partial y^2}\ ,\ \dfrac{\partial^2 E_P}{\partial y^2}$

* النوع الثاني : يتعلق بمتغيرين :(x,y) ، (x,z) ، (y,z) و تكون المشتقات من الشكل :

$$\frac{\partial^2 E_P}{\partial x\partial y}\ ,\ \frac{\partial^2 E_P}{\partial y\partial x}\ ,\ \frac{\partial^2 E_P}{\partial x\partial z}\ ,\ \frac{\partial^2 E_P}{\partial z\partial x}\ ,\ \frac{\partial^2 E_P}{\partial y\partial z}\ ,\ \frac{\partial^2 E_P}{\partial z\partial y}$$

نلاحظ تبادلا بين كل زوج من المتغيرات، فنحصل على :

- نشتق بالنسبة لـ x ثم بالنسبة لـ y : $E_{\mathrm{P}}\ \overset{x}{\rightarrow}\ \dfrac{\partial E_P}{\partial x}\ \overset{y}{\rightarrow}\ \dfrac{\partial^2 E_P}{\partial x\partial y}$
- نشتق بالنسبة لـ y ثم بالنسبة لـ x : $E_{\mathrm{P}}\ \overset{y}{\rightarrow}\ \dfrac{\partial E_P}{\partial x}\ \overset{x}{\rightarrow}\ \dfrac{\partial^2 E_P}{\partial y\partial x}$

في الحقيقة لا فرق بين النتيجتين، إلا في ترتيب الاشتقاق بالنسبة لـ x ثم لـ y أو العكس، و لكون

هاذين المتغيرين المستقلين، فالنتيجة يجب أن تكون متطابقة :

$$\frac{\partial^2 E_P}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 E_P}{\partial y \partial x} \ , \ \frac{\partial^2 E_P}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 E_P}{\partial z \partial x} \ , \ \frac{\partial^2 E_P}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 E_P}{\partial z \partial y}$$

و إذا عوضنا بمركبات القوة، نجد أحد أهم خواص القوة المحافظة:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_x}{\partial y} = \dfrac{\partial F_y}{\partial x} \\ \dfrac{\partial F_x}{\partial z} = \dfrac{\partial F_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial F_y}{\partial z} = \dfrac{\partial F_z}{\partial y} \end{cases}$$

4- تطبيقات :

أ- الطاقة الكامنة للنابض المرن :

عندما يكون النابض مرنا، فإن تطبيق قوة شد عليه، تؤدي إلى تغير في طوله الأصلي، و تنتج قوة رد فعل مقاومة للقوة الأولى تساويها و تعاكسها في الاتجاه، نسميها عادة قوة مرونة النابض و هي تتناسب مع قيمة التشوه الحاصل و تكتب :

$$F(x) = -K.x$$

حيث x هي طول التشوه، و K ثابت موجب يتعلق بخواص النابض، يسمى ثابت المرونة.
نلاحظ أن القوة دالة للمتغير x فقط، و التشوه الناتج يكون حسب هذا المتغير كذلك فقط، مما يعني أن الطاقة الكامنة للمرونة سوف تكون دالة لهذا المتغير فقط، أي :

$$F_x = F(x) = -\frac{dE_P}{dx} = -K.x$$

و بالتكامل حسب x نجد :

$$E_P(x) = \int K.xdx = \tfrac{1}{2}K.x^2 + C$$

نتيجة التكامل، يظهر ثابت C غير محدد، لذلك نقول أن الطاقة الكامنة تعرف دائما بدلالة ثابت كيفي، و عادة ما نلجأ إلى تحديد هذا الثابت بافتراض اصطلاح معين يسمح بتبسيط شكل الطاقة الكامنة دون أن يؤثر على مدلولها الفيزيائي، فمثلا في حالة النابض، يتبسط شكل الطاقة إذا أخذنا $(C = 0)$ و هذا يحدث في حالة :

$$E_P(0) = \tfrac{1}{2}K.(0)^2 + C = 0 + C = 0$$

فيكون الشكل المعتمد للطاقة الكامنة لمرونة النابض هو:

$$E_P(x) = \tfrac{1}{2}K.x^2$$

هذا الشكل منطقي، لأن أثناء استرخاء النابض لا يوجد تخزين للطاقة الكامنة.

ب- الطاقة الكامنة جاذبية العامة :

هي قوة تجاذب بين كتلتين $M\ ,\ m$ المسافة بينهما $\boldsymbol{\rho}$ ، عبارتها من الشكل:

$$\vec{F}_g = -G.\frac{M.m}{\rho^2}\vec{U}_\rho$$

حيث $G = 6{,}67.10^{-11}$ يمثل ثابت الجاذبية العامة، نلاحظ هنا كذلك أن القوة بدلالة متغير وحيد هو $\boldsymbol{\rho}$ ، و بالتالي فإن العلاقة بالطاقة الكامنة سوف تكتب من الشكل :

$$F_\rho = -\frac{dE_P}{d\rho} = -G.\frac{M.m}{\rho^2}$$

لنجد الطاقة الكامنة من الشكل :

$$E_P = \int G.\frac{M.m}{\rho^2}d\rho = -G.\frac{M.m}{\rho} + C$$

هنا سوف نعتمد على نفس القاعدة لتحديد قيمة الثابت، غير أن المتغير هنا موجود في المقام، فلا يمكن افتراض الطاقة الكامنة للجاذبية معدومة عندما يكون ($\boldsymbol{\rho} = 0$) لأن قيمة الطاقة ستكون ببساطة غير منتهية: $lim_{\boldsymbol{\rho}\to\mathbf{0}}\, E_P = \infty$ ، بالمقابل نلاحظ أن تأثير الجاذبية ينعدم عندما تبتعد الجملة إلى ∞ ، و هذا يعني أن الطاقة الكامنة تنعدم في هذه الحالة لذلك سوف نختار هذه الوضعية لتحديد قيمة الثابت :

$E_P(\infty) = -G.\frac{M.m}{\infty} + C = 0 + C = 0$ ، و منه نحصل على $(C = 0)$

و تكون الطاقة :

$$E_P = -G.\frac{M.m}{\rho}$$

III - **الطاقة الميكانيكية الكلية** :

1- تعريف الطاقة الميكانيكية الكلية :

ليكن جسم كتلته m يتحرك داخل معلم، تحت تأثير مجموعة قوى محافظة محصلتها $\vec{F}$ ، وفق المسار (C) ، في لحظة معينة ($\boldsymbol{t}$) يوجد عند الموقع $\boldsymbol{M}$ ، فهو بالتالي يملك :

- طاقة حركية نتيجة سرعته و كتلته
- طاقة كامنة نتيجة القوة $\vec{F}$

نعرف الطاقة الميكانيكية الكلية للجسم بالمقدار:

$$E(M) = E_C(M) + E_P(M)$$

كما نلاحظ هي قيمة لحظية تتعلق بالموقع $\boldsymbol{M}$ و اللحظة ($\boldsymbol{t}$)، هي تتعلق :

- السرعة و الموقع، بالتالي بالمعلم، أي أنها مقدار نسبي
- الثابت الكيفي للطاقة الكامنة

إجمالا، فالطاقة الميكانيكية مقدار نسبي، غير أن المفهوم الذي يملك معنى فيزيائيا، هو تغير هذا المقدار و الذي لا يتأثر لا بالمعلم و لا كذلك بثابت الطاقة الكامنة.

2- مبدأ إنحفاظ الطاقة الميكانيكية الكلية :

لنأخذ الجسم السابق و مجموعة القوى المحافظة $\vec{F}$ ، و نحسب العمل الميكانيكي المنجز بين النقطتين M_1 و M_2 :

$$W_{M_1 \to M_2} = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F}.\vec{dl} = \int_{M_1}^{M_2} dE_C = \Delta E_C$$

$$W_{M_1 \to M_2} = -\int_{M_1}^{M_2} dE_P = -\Delta E_P$$

لنحصل في الأخير على العلاقة :

$$\Delta E_C + \Delta E_P = \Delta E = 0$$

- مضمون المبدأ:

" الطاقة الميكانيكية لجملة خاضعة لمجموعة قوى محافظة، تكون محفوظة دائما "

3- تطبيقات :

- حالة النابض المرن:

لنأخذ النابض السابق و نطبق عليه قوة شد نحو الأسفل، فيتشوه و يزداد طوله بالمسافة (a)، ثم نتركه يهتز تحت تأثير قوة الارجاع، عند مسافة كيفية (x) يملك النابض :

- طاقة حركية : $E_C(x) = \frac{1}{2}.mV^2$

- طاقة كامنة : $E_p(x) = \frac{1}{2}.Kx^2$

وتكون طاقته الميكانيكية هي مجموع المقدارين السابقين :

$$E(x) = \tfrac{1}{2}.mV^2 + \tfrac{1}{2}.Kx^2 = E_0$$

لتحديد قيمة هذه الطاقة نستعمل وظعية خاصة هي بداية الحركة $(x = a)$ ، حيث تتحرك الكتلة بدون سرعة ابتدائية، لنجد :

$$E(a) = 0 + \tfrac{1}{2}.Ka^2 = E_0$$

أي أن : $$E_0 = \tfrac{1}{2}.Ka^2$$

في الحقيقة هذه الطاقة المخزنة داخل النابض، قدمناها له بإنجازنا العمل الميكانيكي عندما سحبنا الكتلة للمسافة $(x = a)$ ، بعدها يستمر النابض في الأهتزاز بين الوضعيتين $(-a\ ,\ +a)$.
في حالة وجود احتكاك يقاوم حركة الكتلة، فإن هذا الإهتزاز يتخامد بالتدريج لتتوقف الحركة بعد زمن معين.

- حالة قوة الجاذبية :

نفترض أننا نريد إرسال قمر صناعي من الأرض نحو كوكب معين أو لهدف معين، فإن طبيعة الحركة يتم تحديده تماما عند لحظة الانطلاق، بحث أن السرعة المكتسبة خلال اللحظة القصيرة للإنطلاق تعطي للقمر طاقته الميكانيكية اللازمة، و تكون الحركة اللاحقة مرتبطة بشكل كبير بهذه القيمة.

عند وضعية معينةM فإن الطاقة الميكانيكية تكون من الشكل :

$$E(M)=E_C(M)+E_P(M)$$

بالنسبة للطاقة الحركية فهي من الشكل : $E_C(M)=\frac{1}{2}.mV^2$

و الطاقة الكامنة تكون من الشكل :

$$E_P(M)=-G.\frac{M.m}{\rho}$$

فنكتب الطاقة الميكانيكية كما يلي :

$$E(M)=\frac{1}{2}.mV^2-G.\frac{M.m}{\rho}$$

الطاقة الحركية مقدار موجب دائما لذلك فهو يمثل شرطا أساسيا لكي تتحقق الحركة، فنكتب :

$$E_C(M)=E(M)+G.\frac{M.m}{\rho}\geq 0$$

إن مسار القمر المرسل من الأرض يمكن حسب هذا الشرط أن يكون إما، مسارا دائريا، و إما مسارا كيفيا مغلقا أو مفتوحا.

- المدار الدائري :

قوة الجاذبية مركزية و المسار دائري نصف قطره r_0 ، لذلك تكون الحركة منتظمة و يكون

التسارع ناظميا يكتب من الشكل : $\gamma_N=\frac{{V_0}^2}{r_0}$

نستخرج من عبارة القوة قيمة هذا التسارع : $\gamma_N=\frac{G.M}{{r_0}^2}$ ،

ونجد قيمة السرعة : ${V_0}^2=\frac{G.M}{r_0}$

نعوضها في عبارة الطاقة الحركية فنجد : $E_C(M)=\frac{1}{2}m.\frac{G.M}{r_0}=\frac{1}{2}.G\frac{m.M}{r_0}$

وهي كما نرى موجبة دائما و ثابتة و تصبح الطاقة الميكانيكية في الأخير :

$$E(M)=-\frac{1}{2}G.\frac{M.m}{r_0}$$

" الطاقة الميكانيكية لقوة الجاذبية في حالة مسار دائري، تكون ثابتة و سالبة".

- المدار غير الدائري :
تكون كلا من الطاقة الحركية و الطاقة الكامنة متغيرتين، غير أن المقياس الذي نحدد به إمكانية وجود الحركة من عدمها، و طبيعتها، هو أن : الطاقة الحركية مقدار موجب دائما.
نكتب الطاقة الميكانيكية للمتحرك من الشكل :

$$E(M) = E_C(M) - G.\frac{M.m}{\rho} = E_0$$

و نستخرج شرط الطاقة الحركية :

$$E_C(M) = E(M) + G.\frac{M.m}{\rho} = E_0 + G.\frac{M.m}{\rho} \geq 0$$

حسب قيم الثابت E_0 نناقش طبعة الحركة:

- الحالة $E_0 > 0$ (المسار مفتوح: قطع مكافيء أو قطع زائد): من العلاقة نجد أن الطاقة الحركية دائما موجبة، و المتحرك يستطيع الذهاب إلى ← ∞ و تكون عندها سرعته غير معدومة وتساوي : $V_\infty = \sqrt{2E_0/m}$
- الحالة $E_0 < 0$: (المسار مغلق : قطع ناقص): الطاقة الكامنة تنعدم من أجل : $\rho_l = -G.\frac{M.m}{E_0}$ ، و هو يمثل أقصى بعد عن الأرض يصله المتحرك ، ثم بعد ذلك يعود فينجذب نحو الأرض مرة أخرى، و يبقي سجينا للجاذبية في مدار محدد إهليجي الشكل، غير أن هناك حالات تكون فيها قوة الجاذبية شديدة فيقترب بشكل كبير من سطح الأرض ويسقط عليها.

4 - الطاقة الميكانيكية في حالة قوى غير محافظة:

نفترض أن لدينا جسما متحركا على مسار معين (C)، تحت تأثير مجموعة قوى محافظة $\vec{F}$ ، و مجموعة قوى أخرى غير محافظة $\vec{f}$ ، نقوم بحساب العمل الميكانيكي الذي تنجزه كلا المجموعتين بين النقطتين M_1 و M_2 :

$$W_{M_1 \to M_2} = \int_{M_1}^{M_2} \left(\vec{F} + \vec{f}\right).\overrightarrow{dl} = \int_{M_1}^{M_2} dE_C = \Delta E_C$$

حسب نظرية الطاقة الحركية :

$$= \int_{M_1}^{M_2} \vec{F}.\overrightarrow{dl} + \int_{M_1}^{M_2} \vec{f}.\overrightarrow{dl} = -\int_{M_1}^{M_2} dE_P + \int_{M_1}^{M_2} \vec{f}.\overrightarrow{dl}$$

و حسب علاقة الطاقة الكامنة بالقوى المحافظة :

$$= -\Delta E_P + W_{M_1 \to M_2}\left(\vec{f}\right)$$

لنحصل في الأخير على العلاقة :

$$\Delta E = \Delta E_C + \Delta E_P = W_{M_1 \to M_2}\left(\vec{f}\right)$$

و يكون مضمون المبدأ لتغير الطاقة الميكانيكية كما يلي :

" إن تغير الطاقة الميكانيكية لأي جملة خلال انتقالها عبر مسلك معين و بين نقطتين محددتين، يساوي دائما عمل القوى غير المحافظة المنجز عبر نفس المسلك و بين نفس النقطتين."

القوى غير المحافظة هي أساسا قوى رد الفعل الناتجة عن الاحتكاك، طبيعتها أنها تقاوم الحركة و يكون عملها دائما سالبا، لذلك فالتغير في الطاقة الميكانيكية هو ضياع أو تبديد لها، يكون على شكل حرارة، و هو ما يفسر غالبا، تخامد حركة الأجسام.

Nom du document : الفصل السادس - العمل و الطاقة الميكانيكية
Répertoire : C:\Users\user\Documents
Modèle :
C:\Users\user\AppData\Roaming\Microsoft\Templates\Normal.dot
m
Titre :
Sujet :
Auteur : user
Mots clés :
Commentaires :
Date de création : 03/12/2012 09:57:00
N° de révision : 99
Dernier enregistr. le : 22/01/2013 23:03:00
Dernier enregistrement par : user
Temps total d'édition : 2 108 Minutes
Dernière impression sur : 22/01/2013 23:11:00
Tel qu'à la dernière impression
Nombre de pages : 16
Nombre de mots : 3 471 (approx.)
Nombre de caractères : 19 091 (approx.)